Matematika III, 1. cvičení

Definiční obory

Poznámka. Pro kružnici se středem v bodě $[x, y]$ a poloměrem r budeme používat označení $k([x, y]; r)$.

Příklad 1. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}.$$

Výsledek. Mezikruží mezi $k([0, 0]; 1)$ a $k([0, 0]; 2)$

Příklad 2. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}.$$

Výsledek. Prostor mezi $k([\frac{1}{2}, 0]; \frac{1}{2})$ a $k([1, 0]; 1)$, menší kružnice tam patří, větší ne.

Příklad 3. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \arcsin\frac{x}{y} - \frac{1}{|y| - |x|}.$$

Výsledek. Prostor mezi přímkami $y = x$ a $y = -x$ kromě těchto přímek (do této množiny patří osa y kromě bodu $[0, 0]$, množina vypadá jako přesýpací hodiny).

Příklad 4. *Určete definiční obor funkce f a zobrazte ho v rovině:*

$$f(x, y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}}.$$

Výsledek. Elipsoid (i s vnitřkem) se středem v bodě $[0, 0, 0]$ a poloosami a (prochází bodem $[a, 0, 0]$), b (prochází bodem $[0, b, 0]$) a c (prochází bodem $[0, 0, c]$).

Křivky v $\mathbb{R}^n$, tečna ke křivce

Křivka v $\mathbb{R}^n$ je zobrazení $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, tedy c zobrazí reálné číslo x na bod $[c_1(x), \dots, c_n(x)]$ v prostoru $\mathbb{R}^n$, přičemž $c_1, \dots, c_n$ jsou funkce $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Derivace funkce c v bodě t_0, tj. vektor $c'(t_0) = (c_1'(t_0), \dots, c_n'(t_0))$, je tečným vektorem ke křivce c v bodě $c(t_0)$. Přímka

$$p = \{c(t_0) + sc'(t_0); s \in \mathbb{R}\}$$

je tečna ke křivce c v bodě t_0.

Příklad 5. *Určete tečnu křivky dané předpisem $c(t) = (\ln t, \operatorname{arctg} t, e^{\sin(\pi t)})$ v bodě $t_0 = 1$.*

Výsledek. Tečna $p = \{[s, \frac{\pi}{4} + \frac{s}{2}, 1 - \pi s]; s \in \mathbb{R}\}$.

Příklad 6. *Určete parametrickou rovnici tečny v bodě $[1, 1, \sqrt{2}]$ ke křivce, jež vznikla jako průsečík plochy o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s plochou $x^2 + y^2 - 2x = 0$.*

Nápověda. Křivku si v okolí daného bodu vyjádřete stejným způsobem jako ve výše uvedených příkladech.

Výsledek. Tečna $p = \{[1 - \sqrt{2}s, 1, \sqrt{2} + s]; s \in \mathbb{R}\}$.

Limity funkcí více proměnných

Pro počítání limit $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ nemáme k dispozici žádnou analogii L'Hospitalova pravidla, musíme tedy používat různé úpravy. Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou proměnných spočívá v odlišnosti okolí limitního bodu: u funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po přímce, tj. ze dvou stran (pak má funkce limitu v bodě, pokud existují obě jednostranné limity, které se rovnají), ale u funkce dvou a více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby (po přímkách, parabolách, ...). Existence limity v daném bodě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Pokud tedy dostaneme různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě neexistuje. V následujících příkladech vypočítejte limity, případně dokažte, že neexistují.

Nápověda. Pokud po dosazení limitních bodů nevyjde neurčitý výraz, můžeme tyto limitní body dosadit. Pokud vyjde neurčitý výraz, můžeme zkoušet různé postupy:

(1) rozložit čitatel nebo jmenovatel na součin podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;

(2) rozšířit čitatel i jmenovatel něčím vhodným podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;

(3) $\frac{\text{ohraničený výraz}}{\infty} = 0, 0 \cdot (\text{ohraničený výraz}) = 0$;

(4) použít vhodnou substituci, po které bychom dostali limitu jedné proměnné;

(5) převést limitu dvou proměnných do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi$$

(je-li v limitě výraz $x^2 + y^2$, polární souřadnice většinou fungují, protože pak dostaneme jednodušší výraz $x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r^2$, který nezávisí na φ);

(6) zvolit $y = kx$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po přímkách, v případě jiného limitního bodu je potřeba drobná úprava, aby přímky limitním bodem procházely), $y = kx^2$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, v případě jiného limitního bodu je opět potřeba drobná úprava), případně jinak vhodně parametricky nahradit $x = f(k)$ a $y = g(k)$, a pokud bude hodnota limity záviset na parametru k, limita neexistuje; tento postup lze použít pouze k důkazu neexistence limity, nikoliv k výpočtu její hodnoty za předpokladu, že existuje!

Příklad 7. $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)} \frac{\ln x}{y}$

Výsledek. 2.

Příklad 8. $\lim_{(x,y)\to(4,4)} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$

Nápověda. Rozložte jmenovatel na součin podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin.

Výsledek. $\frac{1}{4}$.

Příklad 9. $\lim_{(x,y)\to(1,\infty)} \frac{\cos y}{x+y}$

Nápověda. Použijte postup (3).

Výsledek. 0.

Příklad 10. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$

Nápověda. Rozšiřte zlomek výrazem $\frac{y}{y}$ a použijte substituci $t = xy$ (protože $(x, y) \to (0, 2)$, bude $t \to 0$).

Výsledek. 2.

Parciální derivace

Pro funkci $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou parciální derivace prvního řádu definovány takto:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad f'_y(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Při výpočtu parciální derivace podle jedné proměnné považujeme druhou proměnnou za konstantu a derivujeme podle první proměnné.

Parciální derivace druhého a vyšších řádů dostaneme (podobně jako několikanásobné derivace funkcí jedné proměnné) opětovným derivováním dané funkce. Např. f''_{xy} dostaneme tak, že nejdřív zderivujeme funkci f podle x (přitom y považujeme za konstantu) a výsledek pak zderivujeme podle y (tentokrát x považujeme za konstantu).

Příklad 11. *Vypočtěte f'_x a f'_y, kde $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.*

Příklad 12. *Vypočtěte f'_x a f'_y, kde $f(x, y) = x^y; x > 0$.*

Příklad 13. *Vypočtěte všechny parciální derivace prvního a druhého řádu funkce $f(x, y, z) = x^{\frac{y}{z}}$.*

Výsledek. $f'_x = \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}, f'_y = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{1}{z}, f'_z = x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{-y}{z^2}$,
$f''_{xx} = \frac{y}{z}(\frac{y}{z} - 1)x^{\frac{y}{z}-2}, f''_{yy} = x^{\frac{y}{z}} \ln^2 x \cdot \frac{1}{z^2}, f''_{zz} = x^{\frac{y}{z}} \ln^2 x \cdot \frac{y^2}{z^4} + x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{2y}{z^3}$,
$f''_{xy} = \frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} \ln x \cdot \frac{1}{z}, f''_{xz} = \frac{-y}{z^2}x^{\frac{y}{z}-1} + \frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1} \ln x \cdot \frac{-y}{z^2}, f''_{yz} = x^{\frac{y}{z}} \ln^2 x \cdot \frac{-y}{z^3} + x^{\frac{y}{z}} \ln x \cdot \frac{-1}{z^2}$.