Matematika III, 6. cvičení

Integrální počet funkcí dvou proměnných

Pokud lze množinu $S \subseteq \mathbb{R}^2$ zadat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici (např. $x \in \langle a, b\rangle$) umíme zadat dvěma funkcemi rozsah další souřadnice $y \in \langle \varphi(x), \psi(x)\rangle$, pak

$$\iint_S f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Příklad 1. *Vypočtěte* $\iint_{\langle 0,1\rangle \times \langle -1,2\rangle} (x^2 + 2xy)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Výsledek. $\frac{5}{2}$.

Příklad 2. *Vypočtěte* $\iint_{\langle 0,1\rangle \times \langle 0,3\rangle} [3(x-1)^2 + (y-2)^2 + 2]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Výsledek. 12.

Příklad 3. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} (2 - xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Výsledek. $\frac{7}{24}$.

Příklad 4. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_0^{\pi} (x \sin y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Výsledek. 1.

Příklad 5. *Vypočtěte* $\int_3^4 \int_x^{2x} \frac{1}{x^2 - 3x + 2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$. *(Tip: po nějaké době rozložte na parciální zlomky.)*

Výsledek. $3\ln 2 - \ln 3$.

Příklad 6. *Zaměňte pořadí integrace:* $\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Výsledek. $\int_0^4 \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Příklad 7. *Zaměňte pořadí integrace:* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Výsledek. $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Příklad 8. *Spočítejte* $\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \int_y^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} y^2 \sin x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

Nápověda. Protože integrál $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$ neumíme vypočítat, zaměňte nejdříve pořadí integrace a pak výsledný integrál spočítejte pomocí substituce $t = x^2$.

Výsledek. $\frac{1}{6}$.

Příklad 9. *Spočítejte* $I = \iint_M 8y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde* $M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, xy \geq 1, x + y \leq \frac{5}{2}\}$.

Nápověda. $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2} - x} 8y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Výsledek. $\frac{9}{2}$.

Příklad 10. *Spočítejte* $\iint_S xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde S je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí* $y = x$ *a* $y = x^2$.

Výsledek. $\frac{1}{40}$.

Příklad 11. *Spočítejte* $\iint_A x^3 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *kde A je plocha v 1. kvadrantu ohraničená grafy funkcí* $y = x$ *a* $y = x^3$.

Výsledek. $\frac{1}{30}$.

Transformace souřadnic při integraci

Nechť $G(x, y) \colon M \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté, prvky Jacobiho matice $G'(x, y)$ jsou spojité funkce a $\det G'(x, y) \neq 0$ pro všechna $[x, y] \in M$. Pak pro každou „rozumnou“ (přesněji Riemannovsky měřitelnou) množinu K a spojitou funkci $f \colon G(K) \to \mathbb{R}$ platí:

$$\iint_{G(K)} f(s,t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \iint_K f(G(x,y))|\det G'(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Velmi důležitá je transformace do polárních souřadnic:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

tj. pro dané r a φ dostaneme bod ve vzdálenosti r od počátku $[0, 0]$, přičemž velikost orientovaného úhlu, vedeného v kladném směru (tj. proti směru hodinových ručiček) od osy x k polopřímce začínající v $[0, 0]$ a procházející přes tento bod, je φ.

Tedy $G(r, \varphi) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi] = [g(r, \varphi), h(r, \varphi)]$. Pak Jacobiho matice zobrazení G je $G'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} g'_r & g'_\varphi \\ h'_r & h'_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$. Dále jacobián je $\det G'(r, \varphi) = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$. Protože poloměr $r \geq 0$, je $|\det G'(r, \varphi)| = |r| = r$. Transformace do polárních souřadnic je obvykle výhodná, pokud je množina, přes kterou integrujeme, kruhem, mezikružím, kruhovou výsečí nebo něčím podobným.

Někdy je lepší použít transformaci do polárních souřadnic se středem v bodě $[a, b]$ (obvykle v případech, kdy je množina, přes kterou integrujeme, podobná kruhu se středem v bodě $[a, b]$) místo výše uvedené transformace se středem v bodě $[0, 0]$:

$$x = r\cos\varphi + a, \quad y = r\sin\varphi + b.$$

Snadno si můžete ověřit, že jacobián této transformace je opět r. Přípustné hodnoty nových proměnných jsou $r \in \langle 0, \infty), \varphi \in \langle 0, 2\pi)$.

Zdůrazněme zejména, že transformace při výpočtu integrálů více proměnných vybíráme podle tvaru množiny, přes kterou se integruje, nikoliv podle integrované funkce, jako je tomu u integrálů jedné proměnné!

Příklad 12. *Spočítejte integrál*

$$\iint_M \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde $M : 1 \leq (x-1)^2 + (y+1)^2 \leq 4$.

Nápověda. M je mezikruží se středem $[1, -1]$, tudíž použijeme polární souřadnice se středem $[1, -1]$.

Výsledek. $\frac{14}{3}\pi$.

Příklad 13. *Vypočtěte integrál* $\iint_A 2(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}A$, *kde* $A : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq |x|$.

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic.

Výsledek. $\frac{15}{4}\pi$.

Příklad 14. *Vypočtěte* $\int_0^1 \int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Nápověda. Transformujte do polárních souřadnic.

Výsledek. $\frac{3}{8}\pi$.

Obsah plochy, hmotnost, těžiště

Integrály můžeme využít například při výpočtu následujících věcí:

(1) obsah plochy A je
$$\iint_A \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(2) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x,y]$ danou funkcí $\varrho(x,y)$ má hmotnost
$$M = \iint_A \varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(3) hmotná destička mající plochu A a hustotu v bodě $[x,y]$ danou funkcí $\varrho(x,y)$ má souřadnice těžiště $[x_0,y_0]$ dané vztahy
$$x_0 = \frac{1}{M}\iint_A x\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \quad y_0 = \frac{1}{M}\iint_A y\varrho(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Příklad 15. *Určete obsah množiny A ohraničené křivkami $x = y^2$ a $x = 4y^2 - 3$.*

Výsledek. 4.

Příklad 16. *Určete obsah rovinného obrazce omezeného křivkami o rovnicích $x = 0$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 8$ a $y = 4x$.*

Výsledek. $\frac{1}{2} + 2\ln 2$.

Příklad 17. *Určete obsah elipsy $x^2 + 2y^2 = 1$.*

Nápověda. Použijte afinní transformaci souřadnic.

Výsledek. $1/sqrt2$.

Příklad 18. *Máme destičku ve tvaru rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s přeponou délky 1, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od jedné z odvěsen a v protějším vrcholu je rovna 2. Najděte těžiště destičky.*

Nápověda. Uvažujte trojúhelník s vrcholy $[0,0], [1/\sqrt{2},0], [0,1/\sqrt{2}]$.

Výsledek. $M = \frac{1}{6}, x_0 = \frac{\sqrt{2}}{8}, y_0 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}-x} 2\sqrt{2}y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{24}, T = [\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{24}]$.

Příklad 19. *Určete souřadnice těžiště homogenní destičky ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $x + y = 2$.*

Výsledek. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.

Příklad 20. *Určete souřadnice těžiště destičky, ohraničené grafy křivek $y = x^2$ a $x + y = 1$, je-li hustota v bodě $[x,y]$ rovna jeho vzdálenosti od osy y.*

Výsledek. $T = [-\frac{1}{2}, \frac{8}{5}]$.

Příklad 21. *Určete souřadnice těžiště T kruhové destičky $x^2 + y^2 \le a^2$, kde $a > 0$, je-li její hustota v daném bodě přímo úměrná vzdálenosti tohoto bodu od bodu $[a,0]$ (pro výpočet můžeme vzít hustotu rovnu c krát zmíněná vzdálenost).*

Nápověda. Užijte transformaci $x - a = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, tj. polární souřadnice se středem $[a,0]$.

Výsledek. $M = \frac{32a^3c}{15}, T = [-\frac{a}{5}, 0]$.