Matematika III, 4. cvičení

Derivace funkce zadané implicitně

Funkci značíme písmenem y, proměnnou písmenem x, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace x je 1, ale derivace y je y', takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

Příklad 1. *Určete první a druhou derivaci, pokud* $x^2 + y^2 = 1$.

Výsledek. $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

Příklad 2. *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.

Příklad 3. *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

Výsledek. $y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.

Příklad 4. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[1, 1]$ *implicitně rovnicí* $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. *Určete* $y'(1)$ *a* $y''(1)$.

Výsledek. $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

Příklad 5. *Nechť je funkce* $y = y(x)$ *dána v okolí bodu* $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *implicitně rovnicí* $y - \frac{\sin y}{2} = x$. *Určete* $y'(\frac{\pi-1}{2})$ *a* $y''(\frac{\pi-1}{2})$.

Výsledek. $y'(\frac{\pi-1}{2}) = 1, y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

Příklad 6. *Rozhodněte, zda křivka* $x^3 - y^3 + 2xy = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, -1]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Nápověda. Křivku v okolí bodu $[1, -1]$ považujte za funkci $y(x)$ zadanou implicitně, odpovězte podle hodnoty druhé derivace této funkce v daném bodě.

Výsledek. $y''(1) = 16 > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.

Příklad 7. *Rozhodněte, zda křivka* $\frac{9}{2}x^2 - 3xy^2 + y^3 - \frac{9}{2} = 0$ *leží v okolí bodu* $[1, 3]$ *nad (nebo pod) svojí tečnou.*

Výsledek. $y''(1) = \frac{15}{9} > 0$, funkce je tedy konvexní a leží nad tečnou.