

## Matematika III, 5. cvičení

### Absolutní extrémy funkcí více proměnných na kompaktní množině

Na kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) množině  $M$  nabývá funkce  $f$  svých absolutních (globálních) extrémů buď ve stacionárních bodech ležících v  $M$  nebo na hranici množiny  $M$ . Při určování absolutních extrémů funkce  $f$  postupujeme takto:

- (1) určíme stacionární body uvnitř  $M$ , případně body, ve kterých nějaká parciální derivace funkce  $f$  neexistuje;
- (2) vyšetříme funkci  $f$  na hranici  $M$ ;
- (3) vybereme největší a nejmenší dosaženou funkční hodnotu.

V bodě (2), který bývá obvykle nejtěžší, se dá pro funkci dvou proměnných postupovat následujícím způsobem:

Na částech  $M_i$  hranice  $M$  si vyjádříme  $y$  pomocí  $x$  nebo naopak (hranici  $M$  rozdělíme na takové části  $M_i$ , aby vyjádření jedné proměnné pomocí druhé nebylo moc komplikované), a to pak dosadíme do předpisu funkce  $f$ , čímž pro každou část  $M_i$  dostaneme novou funkci  $g_i$  jedné proměnné. U každé funkce  $g_i$  určíme také uzavřený interval (protože  $M$  je uzavřená, bude také interval uzavřený), ze kterého je proměnná této funkce, a na tomto intervalu vyšetříme funkci  $g_i$ , tj. určíme funkční hodnoty funkce  $g_i$  v krajních bodech intervalu, v jejích stacionárních bodech ležících uvnitř intervalu a případně v bodech uvnitř intervalu, ve kterých neexistuje  $g'_i$ . Tyto hodnoty funkce  $g_i$  budou stejné jako hodnoty funkce  $f$  v odpovídajících bodech na hranici  $M$ .

**Příklad 1.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = (2x^2 + 3y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$  na množině  $M : x^2 + y^2 \leq 4$ .

*Výsledek.* Největší hodnota je  $\frac{3}{e}$  pro  $[x, y] = [0, \pm 1]$ , nejmenší hodnota je 0 pro  $[x, y] = [0, 0]$ .

**Příklad 2.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$  v trojúhelníku  $M$  ohraničeném souřadnými osami a přímkou  $x + y - 4 = 0$ .

*Výsledek.* Jediným stacionárním bodem je  $[1, 1]$ , v němž je absolutní maximum  $f(1, 1) = 1$ . Absolutní minimum  $-12$  je v bodech  $[4, 0]$  a  $[0, 4]$  ležících na hranici.

**Příklad 3.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$  v trojúhelníku  $M$  s vrcholy  $A = [0, 2]$ ,  $B = [3, 0]$  a  $C = [0, -1]$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je 7 v bodě  $[0, -1]$ , absolutní minimum je  $-\frac{13}{4}$  v bodě  $[\frac{1}{2}, 1]$ . Funkční hodnoty v kandidátech na extrém jsou:  $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{13}{4}$ ,  $f(0, -1) = 7$ ,  $f(0, 2) = -2$ ,  $f(3, 0) = 0$ ,  $f(0, \frac{5}{4}) = -\frac{25}{8}$ ,  $f(\frac{9}{10}, \frac{7}{5}) = -\frac{49}{20}$ ,  $f(\frac{36}{17}, -\frac{5}{17}) = -\frac{25}{17}$ .

**Příklad 4.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$  na množině  $M : x^2 + y^2 \leq 9$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je 36 v bodech  $[0, \pm 3]$ , absolutní minimum je 0 v bodě  $[0, 0]$ .

**Příklad 5.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 2$  na množině  $M$  ohraničené grafy funkcí  $y = 2$  a  $y = |x|$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je 22 v bodě  $[2, 2]$ , absolutní minimum je  $-2$  v bodě  $[-2, 2]$ .

**Příklad 6.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$  na množině určené podmínkami  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je 17 v bodě  $[1, 2]$ , absolutní minimum je  $-3$  v bodě  $[1, 0]$ .

**Příklad 7.** Určete největší a nejmenší hodnotu funkce  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$  na množině  $M : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$ .

*Nápověda.* Protože  $f'_x = 1, f'_y = 2, f'_z = 3$ , nejsou žádné stacionární body, tudíž hledané hodnoty budou na hranici  $M$ , tj. na množině  $M_1 \cup M_2$ , kde  $M_1 : x^2 + y^2 = z \leq 1, M_2 : x^2 + y^2 \leq z = 1$ . Pro  $M_1$  máme funkci  $f_1(x, y) = x + 2y + 3(x^2 + y^2)$  na množině  $N_1 : x^2 + y^2 \leq 1$ , pro  $M_2$  máme funkci  $f_2(x, y) = x + 2y + 3$  na množině  $N_2 : x^2 + y^2 \leq 1$ . Pro funkce dvou proměnných už to (snad) umíme dořešit.

*Výsledek.* Absolutní maximum je  $3 + \frac{3}{\sqrt{5}}$  v bodě  $[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1]$ , absolutní minimum je  $-\frac{5}{12}$  v bodě  $[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}]$ .

V některých speciálních případech (pokud např. umíme sestavit vrstevnice funkce, jejíž extrémy hledáme, a pokud množina, na níž tyto extrémy hledáme, je „dostatečně jednoduchá“) můžeme použít rychlejší metodu, kterou si objasníme na následujícím příkladu:

**Příklad 8.** Pomocí vrstevnic funkce  $f(x, y) = x - y$  určete její největší a nejmenší hodnotu na množině  $M : x^2 + y^2 \leq 1$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum v bodě  $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ , jeho hodnota je  $\sqrt{2}$ , absolutní minimum v bodě  $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ , jeho hodnota je  $-\sqrt{2}$ .

**Příklad 9.** Pomocí vrstevnic funkce  $f(x, y) = xy$  určete její největší a nejmenší hodnotu na množině  $M : |x| + |y| \leq 1$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je  $\frac{1}{4}$  v bodech  $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$ , absolutní minimum je  $-\frac{1}{4}$  v bodech  $[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}]$ .

**Příklad 10.** Pomocí vrstevnic funkce  $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y + 10$  určete její největší a nejmenší hodnotu na množině  $M : x^2 + y^2 \leq 1$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je  $11 + 4\sqrt{2}$  v bodě  $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$ , absolutní minimum je  $11 - 4\sqrt{2}$  v bodě  $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$ .

**Příklad 11.** Pomocí vrstevnic funkce  $f(x, y) = |x| + |y|$  určete její největší a nejmenší hodnotu na množině  $M : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$ .

*Výsledek.* Absolutní maximum je  $2 + \sqrt{2}$  v bodě  $[1 + 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}]$ , absolutní minimum je  $2 - \sqrt{2}$  v bodě  $[1 - 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}]$ .

## Jacobiho matice zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ a jeho inverze

Nechť  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a předpokládejme, že funkce  $f, g$  (tj. složky zobrazení  $F$ ) mají v bodě  $[x_0, y_0]$  spojité parciální derivace a že Jacobiho matice  $F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0, y_0) & f'_y(x_0, y_0) \\ g'_x(x_0, y_0) & g'_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$  zobrazení  $F$  v bodě  $[x_0, y_0]$  je regulární, tj.  $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$  ( $\det F'(x_0, y_0)$  se nazývá jacobíán zobrazení  $F$  v bodě  $[x_0, y_0]$ ). Pak existuje okolí bodu  $[x_0, y_0]$ , v němž je zobrazení  $F$  prosté, tudíž k němu existuje inverzní zobrazení  $F^{-1}$  v okolí bodu  $F(x_0, y_0)$ , a pro Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení v bodě  $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$  platí  $(F^{-1})'(u_0, v_0) = [F'(x_0, y_0)]^{-1}$ .

**Příklad 12.** Rozhodněte, zda je zobrazení  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $f(x, y) = x^2 - y^2, g(x, y) = 2xy$  (tj. zobrazení  $z \mapsto z^2$ , uvažujeme-li  $F$  jako zobrazení  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ), prosté v nějakém okolí bodu  $[2, 1]$ . V případě, že ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě  $F(2, 1)$ .

*Výsledek.*  $\det F'(2, 1) = 20 \neq 0$ , tudíž v nějakém okolí bodu  $[2, 1]$  je  $F$  prosté. Dále

$$(F^{-1})'(3, 4) = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 13.** Rozhodněte, zda je zobrazení  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $f(x, y) = xy$ ,  $g(x, y) = \frac{x}{y}$ , prosté v nějakém okolí bodu  $[2, 1]$ . V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení  $F^{-1}$  v bodě  $F(2, 1)$ .

*Výsledek.*  $\det F'(2, 1) = -4 \neq 0$ , tudíž  $F$  je prosté v nějakém okolí bodu  $[2, 1]$ . Dále

$$(F^{-1})'(2, 2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 14.** Rozhodněte, zda je zobrazení  $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , kde  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $g(x, y) = xy$ , prosté v nějakém okolí bodu  $[0, 1]$ . V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení  $F^{-1}$  v bodě  $F(0, 1)$ .

*Výsledek.*  $\det F'(0, 1) = -1 \neq 0$ , tudíž  $F$  je prosté v nějakém okolí bodu  $[0, 1]$ . Dále

$$(F^{-1})'(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Příklad 15.** Spočítejte jacobíán funkce  $F$ , která je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.

*Nápověda.* Funkce  $F$  je definována následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} [x, y] &\mapsto \left[ \sqrt{x^2 + y^2}, \arctg \frac{y}{x} \right] \text{ pro } x > 0, \\ [x, y] &\mapsto \left[ \sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \arctg \frac{y}{x} \right] \text{ pro } x < 0, \\ [0, y] &\mapsto \left[ y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y) \right]. \end{aligned}$$

Z polárních souřadnic nazpět je to  $F^{-1} : [r, \varphi] \mapsto [r \cos \varphi, r \sin \varphi]$ . Lépe se bude počítat, když napřed určíme jacobíán zobrazení  $F^{-1}$  a z něj pak jacobíán zobrazení  $F$ .

*Výsledek.*  $\det(F^{-1})' = r$ ,  $\det F' = \frac{1}{r}$ .