Příklad 2. Výrobek je podroben třem různým zkouškám. Označme následující jevy:

A – náhodně vybraný výrobek obstojí při první zkoušce,

B – obstojí ve druhé zkoušce,

C – obstojí ve třetí zkoušce.

Vyjádřete v množinové symbolice, že výrobek obstojí

a) jen v první zkoušce,

b) v první a druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce,

c) ve všech třech zkouškách,

d) alespoň v jedné zkoušce,

e) právě v jedné zkoušce,

f) maximálně dvakrát.

Příklad 3. a) Uveďte všechna možná jevová pole na $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

b) Uveďte alespoň tři různá jevová pole na množině $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$.

Příklad 4. Dokažte následující vlastnosti pravděpodobnosti:

- $P(\emptyset) = 0,\ 0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B),\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Příklad 5. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ a $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$. Určete všechny pravděpodobnostní funkce zobrazující $\mathcal{A}$ do množiny $\{0, 1, \theta, 1 - \theta\}$.

Výsledek. Z definice $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, P(\{\omega_2, \omega_3\} = 1 - P(\omega_1)$. Máme tedy dvě možnosti $P(\omega_1) = \theta, P(\omega_1) = 1 - \theta$.

Příklad 6. Kostku, která stejně obarvené všechny stěny, rozřežeme na 1000 kostiček stejných rozměrů. Všechny kostičky zamícháme a náhodně jednu z nich vytáhneme. Vypočítejte pravděpodobnost, že kostička bude mít:

a) všechny stěny neobarvené,

b) jednu obarvenou stěnu,

c) dvě obarvené stěny,

d) tři obarvené stěny.

Příklad 7. V seminární skupině MB104 je 23 studentů. Studenti se dělí na

- 8 dobrých, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 90%;
- 12 průměrných, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 60%;
- ostatní slabé, kteří na matematiku navíc „kašlou“, a tak mají pravděpodobnost složení zkoušky jen 0,1.

a) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolený student zkoušku složí.

b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student, úspěšně složivší zkoušku, byl z těch, kteří na matematiku „kašlali“.

Výsledek. a) 0,639; b) 0,0204;

Příklad 8. Každý ze dvou parníků může doplout do přístaviště vždy jednou za den, a to se stejnou šancí v kterýkoli jeho okamžik a nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu a druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že některý z parníků bude muset čekat, až bude volné přístaviště?

Výsledek. 0,121.

Příklad 9. Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné.

a) Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné.

b) Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou kladné.

Výsledek. a) 0,5417. b) 0,0208.

Příklad 10. Tyč délky d je náhodně rozlomená na tři části. Určete pravděpodobnost, že je možné z těchto částí sestrojit trojúhelník.

Výsledek. 0,25.

Příklad 11. Hodíme jedenkrát kostkou, množina elementárních jevů je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Jevovým polem nechť je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega\}$.

Zjistěte jestli zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dané předpisem

a) $X(\omega_i) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $X(\omega_1) = X(\omega_2) = -2, X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 3$

je náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

Výsledek. ne; ano.

Příklad 12. Je dáno jevové pole $(\Omega, \mathcal{A})$, kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$ a

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_2, \omega_4, \omega_5\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5\}, \Omega\}.$$

Najděte nějaké (co nejobecnější) zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$, které bude náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

Výsledek. $X(\omega_1) = X(\omega_2) = a, X(\omega_3) = b, X(\omega_4) = X(\omega_5) = c.$

Příklad 13. Náhodná veličina X nabývá hodnoty i s pravděpodobností $P(X = i) = \frac{1}{6}$ pro $i = 1, \ldots, 6$. Zapište distibuční funkci $F_X(x)$ a její graf.

Příklad 14. Střelec střílí do terče až do prvního zásahu. Má v zásobě 4 náboje. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu rovna 0,6. Nechť náhodná veličina X udává počet nespotřebovaných nábojů. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci X a nakreslete jejich grafy.

Příklad 15. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$\pi(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{7} \cdot 0{,}7^x & \text{pro } i = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) $P(X < 3)$,

b) $P(X > 4)$,

c) $P(1 < X < 4)$.

Příklad 16. Náhodná veličina má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le 3 \\ \frac{1}{3}x - 1 & \text{pro } 3 < x \le 6 \\ 1 & \text{pro } 6 < x. \end{cases}$$

a) Zdůvodněte, že jde skutečně o distribuční funkci.

b) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

c) Vypočtěte $P(2 < X < 4)$.

Příklad 17. Náhodná veličina má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} & \text{pro } -2 < x \le 2 \\ 1 & \text{pro } 2 < x. \end{cases}$$

a) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte $P(-1 < X < 1)$.

Výsledek. $\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ pro $-2 < x \leq 2$, jinak 0; $\frac{1}{3}$.

Příklad 18. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Určete

a) koeficient a,

b) distribuční funkci,

c) $P(-1 < X < 1)$.

Výsledek. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

Příklad 19. Diskrétní náhodný vektor má sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou

X \ Y	2	5	6
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

Určete

a) marginální distribuční a pravděpodobnostní funkce;

b) sdruženou distribuční funkci a vhodným způsobem ji znázorněte;

c) $P(Y > 3X)$.

Výsledek. $\frac{3}{20}$.

Příklad 20. Určete distribuční funkci náhodného vektoru (X, Y), jehož hustota je

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x-y) & \text{pro } 1 \leq x \leq 2, 2 \leq y \leq 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete dále $P(Y > 2X)$.

Výsledek. $\frac{1}{3}$.

Příklad 21. Určete marginální distribuční funkce, sdruženou a marginální hustotu náhodného vektoru (X, Y), je-li

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \text{nebo } y < 0 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & \text{pro } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 1 & \text{pro } x > 1, y > 2 \\ x^2 & \text{pro } 0 \le x \le 1, y > 2 \\ \frac{y^2}{4} & \text{pro } x > 1, 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Příklad 22. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru (X, Y), jehož distribuční funkce je

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \le -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin x + \frac{1}{2})(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \ge 1. \end{cases}$$

Určete rovněž marginální hustoty a rozhodněte, jsou-li veličiny X a Y nezávislé.

Výsledek. $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, kde $f_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$, jinak 0, a $f_2(x) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Jsou nezávislé.

Příklad 23. V urně je 14 kuliček – 4 červené, 5 bílých a 5 modrých. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru (X, Y), označuje-li X počet tažených červených kuliček a Y počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin X a Y. Dále vypočtěte $P(X \le 3), P(1 \le Y \le 4)$.

Příklad 24. Hustota náhodného vektoru (X, Y, Z) je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & \text{pro } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2, 0 \le z \le 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci a vypočtěte $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{3}, 0 \le Z \le \frac{1}{4})$.

Výsledek. $c = \frac{2}{3}$, $P(0 \le X \le \frac{1}{2}, 0 \le Y \le \frac{1}{3}, 0 \le Z \le \frac{1}{4}) = \frac{5}{48}$.

Příklad 25. Uveďte příklad

a) diskrétní,

b) spojité

náhodné veličiny, pro níž neexistuje střední hodnota.

Příklad 26. Pravděpodobnost zásahu cíle jedním výstřelem je 0,75. Náhodná veličina X udává počet zásahů při 5 nezávislých výstřelech. Určete její rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

Výsledek. $15/4; 15/16$.

Příklad 27. Diskrétní náhodná veličina X nabývá hodnot $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ s pravděpodobností $P(X = k) = p(1-p)^k$ (tzv. geometrické rozdělení). Určete $E(X)$ (střední doba čekání na úspěch) a $D(X)$.

Výsledek. $\frac{1-p}{p}, \frac{1-p}{p^2}$

Příklad 28. Náhodná veličina X má hustotu $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$ pro $x \in (1, \infty)$ a jinde nulovou. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

Výsledek. $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, E(X) = \frac{3}{2}, D(X) = \frac{3}{4}$.

Příklad 29. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $f_X(x) = \cos x$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ a jinde nulovou. Určete střední hodnotu, rozptyl a medián této veličiny.

Výsledek. $\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{6}, \pi - 3$.

Příklad 30. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pro $x \geq 0$, kde $\lambda > 0$ je daný parametr rozdělení, a jinde nulovou (tzv. exponenciální rozdělení). Určete střední hodnotu, rozptyl, modus (reálné číslo s maximální hustotou, resp. pravděpodobnostní funkcí) a medián této veličiny.

Výsledek. $\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln 2}{\lambda}, 0, \frac{1}{\lambda^2}$

Příklad 31. Diskrétní náhodný vektor (X_1, X_2) má simultánní pravděpodobnostní funkci $\pi(0,-1) = c, \pi(0,0) = \pi(0,1) = \pi(1,-1) = \pi(2,-1) = 0, \pi(1,0) = \pi(1,1) = \pi(2,1) = 2c, \pi(2,0) = 3c$ a rovnou nule jinde. Určete konstantu c a vypočtěte:

1. kovarianci $C(X_1, X_2)$,
2. korelační koeficient $R(X_1, X_2)$.

Výsledek. 1. 0,18; 2. 0,42.

Příklad 32. Náhodná veličina X má hustotu $f(x)$. Určete hustotu náhodné veličiny Y tvaru

a) $Y = e^X, X \geq 0$,

b) $Y = \sqrt{X}, X > 0$,

c) $Y = \ln X, X > 0$,

d) $Y = \frac{1}{X}, X > 0$.

Výsledek. $f(\ln y)\frac{1}{y}; 2f(y^2)y; f(e^y)e^y; f(1/y)\frac{1}{y^2}$.

Příklad 33. Náhodná veličina X má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Určete jeho hustotu a hustotu transformovaných veličin $Y = \sin X, Z = \operatorname{tg} X$.

Příklad 34. Náhodná veličina X má hustotu rovnu $\cos x$ pro $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ a nulovou jinde. Určete hustotu náhodné veličiny $Y = X^2$ a vypočtěte $E(Y), D(Y)$.

Výsledek. $\frac{\cos(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$ pro $0 < y < \frac{\pi^2}{4}, E(Y) = \frac{\pi^2-8}{4}, D(Y) = 20 - 2\pi^2$.

Příklad 35. Vypočtěte průměr a rozptyl

a) centrovaných hodnot

b) standardizovaných hodnot.

Příklad 36. Dokažte, že pro rozptyl platí vztah $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ a odvoďte analogický vztah pro modifikovaný rozptyl.

Příklad 37. Dokažte

a) pro $n = 2$,

b) obecně,

že pro koeficient korelace platí tzv. Cauchyova nerovnost $-1 \le r_{12} \le 1$.

Příklad 38. Byly naměřeny následující hodnoty nějakého znaku

$$10; 7; 7; 8; 8; 9; 10; 9; 4; 9; 10; 9; 11; 9; 7; 8; 3; 9; 8; 7.$$

Určete aritmetický průměr, medián, kvartily, rozptyl a příslušný krabicový diagram.

Příklad 39. Mějme nezápornou náhodnou veličinu X se střední hodnotou μ.

1. Bez dalších informací o rozdělení X odhadněte $P(X > 3\mu)$.
2. Víte-li, že $X \sim \mathrm{Ex}(\frac{1}{\mu})$, vypočtěte $P(X > 3\mu)$.

Příklad 40. Ke každému jogurtu běžné značky je náhodně (rovnoměrně) přibalen obrázek některého z 26 hokejových mistrů světa. Kolik jogurtů si fanynka Věrka musí koupit, aby s pravděpodobností 0,95 získala alespoň 5 kartiček Jaromíra Jágra?

Příklad 41. Určete pravděpodobnost, že při 1200 hodech kostkou padne šestka alespoň 150 krát a nejvýše 250 krát

1. pomocí Čebyševovy nerovnosti,
2. pomocí de Moivre-Laplaceovy věty.

Příklad 42. Průměrná rychlost větru je na určitém místě 20 km/hod.

- Bez ohledu na rozdělení rychlosti větru jako náhodné veličiny určete pravděpodobnost, že při jednom pozorování rychlost větru nepřesáhne 60 km/h.
- Určete interval, v němž se bude rychlost větru nacházet s pravděpodobností alespoň 0,9, víte-li navíc, že směrodatná odchylka $\sigma = 1$ km/hod.

Příklad 43. Na FI je 10% studentů s prospěchem do 1,2. Jak velkou skupinu je třeba vybrat, aby s pravděpodobností 0,95 v ní bylo 8-12% studentů s prospěchem do 1,2? Úlohu řešte zvlášť pomocí Čebyševovy a zvlášť pomocí Moivre-Laplaceovy věty.

Příklad 44. Dokažte, že pro kvantily normovaného normálního rozdělení platí vztah

$$-u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{1-\frac{\alpha}{2}}.$$

Náhodným výběrem rozsahu n rozumíme n-tici **stochasticky nezávislých** a náhodných veličin $X_1, \ldots, X_n$, které mají totéž rozdělení. S náhodným výběrem se obvykle setkáváme při opakovaném provádění téhož pokusu.

Statistika je náhodná veličina vzniklá transformací náhodného výběru.

- Výběrový průměr $M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, a jsou-li navíc $X_1, \ldots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$, pak $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$.
- Výběrový rozptyl $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M)^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - nM\right), S = \sqrt{S^2}$.

Intervalovým odhadem parametru θ rozumíme interval (T_L, T_U), kde $T_L(X_1, \ldots, X_n)$ a $T_U(X_1, \ldots, X_n)$ jsou statistiky výběru $(X_1, \ldots, X_n)$. Platí-li

$$P(T_L \leq \theta \leq T_U) = 1 - \alpha,$$

říkáme, že (T_L, T_U) je $100 \cdot (1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametr θ. **Horním odhadem** parametru θ na hladině významnosti $1 - \alpha$ je statistika U, pro níž

$$P(\theta < U) \geq 1 - \alpha,$$

dolním odhadem θ na hladině významnosti $1 - \alpha$ je pak statistika L, pro níž

$$P(L < \theta) \geq 1 - \alpha.$$

Případ, kdy je $X_1, \ldots, X_n$ náhodný výběr z normálního rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$:

- M a S^2 jsou nezávislé náhodné veličiny.
- $M \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, a tedy $U = (M - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$.
- $K = (n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n-1)$.
- $\sum(X_i - \mu)^2/\sigma^2 \sim \chi^2(n)$.

- $T = (M - \mu)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.

Příklad 162. Pravděpodobnost, že zasazený strom se ujme, je 0,8. Jaká je pravděpodobnost, že z 500 zasazených stromů se jich ujme aspoň 380?

Výsledek. 0,987.

Příklad 163. Pravděpodobnost, že semeno vyklíčí, je 0,9. Kolik semen je třeba zasadit, aby s pravděpodobností aspoň 0,995 vyklíčilo cca 90% semen (což přesněji formulujeme se zpřesňujícím požadavkem, aby odchylka podílu vyklíčených semen od 0,9 nepřevýšila 0,034).

Výsledek. $n \approx 614$.

Příklad 164. Životnost (v hodinách) určité elektrické součástky má exponenciální rozdělení s parametrem $\lambda = \frac{1}{10}$. Pomocí centrální limitní věty odhadněte pravděpodobnost, že celková životnost 100 takových součastek bude mezi 900 a 1050 hodinami.

Výsledek. $\mu = 10, \sigma^2 = 100, P(900 \leq \sum X_i \leq 1050) = P\left(\frac{900-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{\sum X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq \frac{1050-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \Phi(0{,}5) - \Phi(-1) \approx 0{,}533$.

Příklad 165. Při 600 hodech kostkou padla jednička pouze 45 krát. Rozhodněte, jestli je možné tvrdit, že jde o ideální kostku na hladině $\alpha = 0{,}01$. Vše zdůvodněte a svůj závěr explicitně formulujte.

Příklad 166. Do bedny ukládáme výrobky se střední hodnotou 3 kg a směrodatnou odchylkou 0,8 kg. Jaký maximální počet výrobků můžeme do bedny uložit, aby celková hmotnost s pravděpodobností 0,9738 nepřekročila jednu tunu?

Výsledek. $n \approx 324$.

Příklad 167. Předpokládejme, že výška desetiletých chlapců má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$. S neznámou střední hodnotou μ a rozptylem $\sigma^2 = 39{,}112$. Změřením výšky 15 chlapců jsme určili výběrový průměr $M = 139{,}13$. Určete

a) 99% oboustranný interval spolehlivosti pro parametr μ,

b) dolní odhad μ na hladině významnosti 95%.

Výsledek. a) $(134{,}97; 143{,}29)$; b) 136,474.

Příklad 168. Odběratel provádí kontrolu jakosti námi dodaných výrobků namátkovou kontrolou testovaného rozměru u 21 náhodně vybraných výrobků. Dodávka bude přijata, pokud nebude výběrová směrodatná odchylka překračovat hodnotu 0,2 mm. Víme přitom, že naše stroje produkují výrobky, u nichž má sledovaný rozměr normální rozdělení tvaru

$N(10\,\mathrm{mm}; 0,0737\,\mathrm{mm}^2)$. S využitím statistických tabulek určete pravděpodobnost, s níž bude dodávka přijata. Jak se změní odpověď, pokud odběratel kvůli nákladům na testy začne testovat pouze 4 výrobky?
(V případě chybějících údajů v tabulce hodnoty, které máte k dispozici, lineárně interpolujte).

Příklad 169. Ze základního souboru, z rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde $\sigma^2 = 0{,}06$ jsme pořidili náhodný výběr s realizacemi 1,3; 1,8; 1,4; 1,2; 0,9; 1,5; 1,7. Určete oboustranný 95% interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu.

Výsledek. $1{,}22 \leq \mu \leq 1{,}58$.

Příklad 170. Náhodná veličina X má normální rozdělení $N(\mu, \sigma^2)$, kde μ, σ^2 nejsou známy. V následující tabulce jsou uvedeny četnosti jednotlivých realizací této náhodné veličiny.

x_i	8	11	12	14	15	16	17	18	20	21
četnost	1	2	3	4	7	5	4	3	2	1

Vypočtěte:

- výběrový průměr,
- výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku,
- 99% interval spolehlivosti pro střední hodnotu μ.

Výsledek. $13{,}954 \leq \mu \leq 16{,}671$

Příklad 171. Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozdělení $N(\mu, 0{,}04)$. Určete nejmenší počet měření, který je třeba provést, aby šířka 95% intervalu spolehlivosti pro μ nepřesáhla 0,16.

Příklad 172. Byla provedena čtyři nazávislá měření obsahu manganu u dvou vzorků oceli a byly získány výsledky:

1. vzorek	0,31%	0,30%	0,29%	0,32%
2. vzorek	0,59%	0,57%	0,58%	0,57%

Stanovte 95% interval spolehlivosti pro rozdíl středních hodnot $\mu_1 - \mu_2$ za předpokladu, že jde o realizace náhodného výběru z normálního rozdělení s neznámými, ale shodnými rozptyly.

Příklad 173. Z velkého souboru resistorů téhož typu bylo náhodně vybráno 16 kusů s výběrovým průměrem hodnot odporu $9{,}3\,\mathrm{k}\Omega$. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výběr pochází z normálního rozdělení se střední hodnotou $\mu = 10\,\mathrm{k}\Omega$, za předpokladu, že:

a) $\sigma^2 = 4\,\mathrm{k}\Omega$,

b) σ^2 není známo a $S^2 = 6{,}25\,\mathrm{k}\Omega$.

Výsledek. a) nezamítáme, b) nezamítáme.

Příklad 174. Na dvou soustruzích se vyrábějí tytéž součástky, u nichž se měří vnitřní průměr (předpokládá se normální rozdělení se stejnými rozptyly u obou soustruhů). Byl pořízen náhodný výběr rozsahu 16 z produkce prvního soustruhu a rozsahu 25 z produkce druhého soustruhu. Příslušné vyběrové průměry jsou 37,5 mm, resp. 36,8 mm a výběrové rozptyly 1,21 mm^2, resp. 1,44 mm^2. Testujte hypotézu o rovnosti střední hodnoty kontrolovaných rozměrů v produkci obou strojů oproti oboustranné alternativě při $\alpha = 0{,}1$.

Příklad 175. Na šachový turnaj má být vybrán jeden zástupce ze dvou oddílových šachistů, a to ten, jehož výkon je stabilnější (má menší rozptyl). Procentuální úspěšnost z posledních turnajů je:

A	49,6	59,4	59,5	76,8	69,4	70,9	68,1	66,3
B	38,5	51,2	79,5	72,3	86,5			

Na hladině významnosti 0,05 testujte, zda je možno rozhodnout o tom, který z hráčů se má turnaje zúčastnit.