

Skupina A

Příklad 1.(2b.) Určete Taylorův polynom čtvrtého stupně funkce $f(x, y) = x^5y^5 \sin(xy) + x^2y$ v bodě $(0, 0)$. (nejde výsledek říci bez počítání?)

Řešení. Taylorův polynom součtu funkcí je součet Taylorových polynomů jednotlivých sčítanců. Dále je zřejmé Taylorův polynom funkce $x^5y^5 \sin(xy)$ nulový, Taylorův polynom libovolného mnohočlenu v nule je mnohočlen samotný. Výsledkem je tedy x^y . \square

Příklad 2. Je dána diferenciální rovnice

$$y'' - 5y' + 4y = 32x^2.$$

Určete

- řešení příslušné homogenní rovnice, (1b.)
- její obecné řešení, (2 b.)
- její jediné řešení y splňující podmínky $y(0) = y'(0) = 0$. (2b.)

Řešení. $\frac{1}{3}e^{4x} - \frac{64}{3}e^x + 8x^2 + 20x + 21$. \square

Příklad 3.(3b.) Určete obsah tělesa ležícího nad osou x , které vznikne odstraněním příslušné části elipsy $x^2 + 2y^2 = 4$ ze čtverce o straně 4, se středem v počátku souřadnic a dvěma stranami rovnoběžnými s osou x .

Řešení. $8 - \sqrt{2}\pi$. \square

Příklad 4.(5b.) Určete distribuční funkci náhodné veličiny udávající povrch krychle, má-li její objem rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu $[1, 8]$.

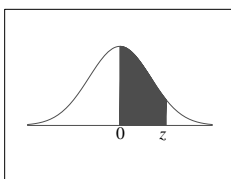
Řešení. Dle zadání se hrana krychle pohybuje v rozmezí $[1, 2]$, tedy její povrch S (označme X náhodnou veličinu jej udávající), který lze spočítat z objemu V (dán náhodnou veličinou Y) jako $S = 6(\sqrt[3]{V})^2$, se pohybuje v rozmezí $[6, 24]$.

Pro t z tohoto intervalu je $F_X(t) = P[X < t] = P[6(\sqrt[3]{Y})^2 < t] = P[Y < (\frac{t}{6})^{\frac{2}{3}}] = \frac{1}{7} \left((\frac{t}{6})^{\frac{2}{3}} - 1 \right)$

\square

Příklad 5.(5b.) Biatlonista střílí ve stoje na terč. Sestřelí jej s pravděpodobností 70%. Kolik minimálně nábojů si musí připravit, aby s pravděpodobností (alespoň) 99% sestřelil pět terčů? Při odhadu počtu použijte přiloženou tabulku.

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

Gilles Cazalais. Typeset with L^AT_EX on April 20, 2006.

Řešení. Označme jako X náhodnou veličinu udávající počet zásahů biatlonisty při n střelách. Potom $X \sim Bi(n, \frac{7}{10})$. Veličina $Z = \frac{X - \frac{7}{10}n}{\sqrt{n \frac{7}{10} \frac{3}{10}}}$ tak má s rostoucím n přibližně normální rozdělení. Toho využijeme při formulaci našeho požadavku:

$$0,99 \leq P[X \geq 5] = P\left[\frac{X - \frac{7}{10}n}{\frac{1}{10}\sqrt{21n}} \geq \frac{5 - \frac{7}{10}n}{\frac{1}{10}\sqrt{21n}}\right]$$

Chceme tedy, aby náhodná veličina Z s standardizovaným normálním rozložením byla větší než $\frac{5 - \frac{7}{10}n}{\frac{1}{10}\sqrt{21n}}$ s pravděpodobností alespoň 99%, tedy $\frac{5 - \frac{7}{10}n}{\frac{1}{10}\sqrt{21n}} > \Phi(0,01) \doteq 2,33$, což po úpravě a substituci $t = \sqrt{n}$ dává kvadratickou nerovnici

$$7t^2 - 2,33\sqrt{21}t - 50 > 0,$$

tedy $t > 3,54$, $n > 12,54$, biatlonista si tedy musí připravit 13 nábojů.

□