Matematika III – 2. týden
Limity funcí více proměnných, směrové derivace, diferenciál, Taylorův rozvoj

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

28. září – 2. října 2015

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`

Plán přednášky

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Speciální volbou přímek ve směru souřadných os dostáváme tzv. **parciální derivace funkce** f, které značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, nebo bez odkazu na samotnou fukci jako operace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + tv) - f(x)).$$

Speciální volbou přímek ve směru souřadných os dostáváme tzv. **parciální derivace funkce** f, které značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, nebo bez odkazu na samotnou fukci jako operace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x + t, y) - f(x, y)),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(f(x, y + t) - f(x, y)).$$

Example

Se samotnými parciálními nebo směrovými derivacemi nevystačíme pro dobrou aproximaci chování funkce lineárními výrazy:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } xy = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Example

Se samotnými parciálními nebo směrovými derivacemi nevystačíme pro dobrou aproximaci chování funkce lineárními výrazy:

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } xy = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad h(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{když } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Žádná z nich neprodlužuje všechny hladké křivky procházející bodem $(0,0)$ na hladké křivky.

Pro g existují obě parciální derivace v $(0,0)$ a jiné směrové derivace neexistují, zatímco pro h existují všechny směrové derivace v bodě $(0,0)$ a platí $d_v h(0) = 0$ pro všechny směry v, takže jde o lineární závislost na $v \in \mathbb{R}^2$.

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x, jestliže

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x)\big)$.

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x, jestliže

1. v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
2. $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v
3. $0 = \lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}\big(f(x+v) - f(x) - d_v f(x)\big)$.

Lineární výraz $d_v f$ (závislý na vektorové proměnné v) nazýváme **diferenciál funkce** f vyčíslený na přírůstku v.

Pozor na pochopení obsahu definice limity funkce na $\mathbb{R}^n$! Je třeba vidět v kontextu metriky na $\mathbb{R}^n$. Pro diferenciál je zde pro každé $\epsilon > 0$ k dispozici $\delta > \delta$ takové, že pro přírůstky v menší než δ bude chyba aproximace poměrného přírůstku hodnot pomocí poměrného přírůstku diferenciálu menší než ϵ.
V literatuře se často také říká **totální diferenciál** df funkce f.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě (x_0, y_0) je lineární funkce $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Uvažujme $f : E_2 \to \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě (x_0, y_0) je lineární funkce $df : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.
Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (*)$$

a platí:

Theorem

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí $(*)$.

Funkce třídy C^1

Definition

Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je třídy C^1 na množině A, jestliže má ve všech bodech množiny A spojité parciální derivace. Píšeme $f \in C^1(A)$.

Viděli jsme, že funkce v $C^1(A)$ mají na A diferenciál, tj. jsou na A diferencovatelné.

Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $(x_0, y_0) \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

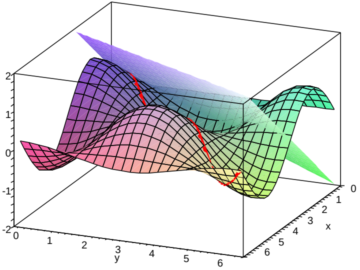
Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f.

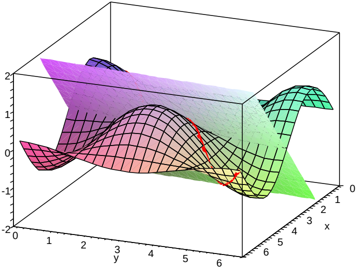
Pro $f : E_2 \to \mathbb{R}$ a pevný bod $(x_0, y_0) \in E_2$ uvažme rovinu v E_3:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

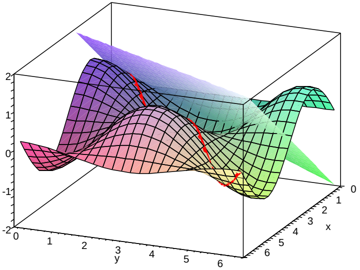
Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0), ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f.

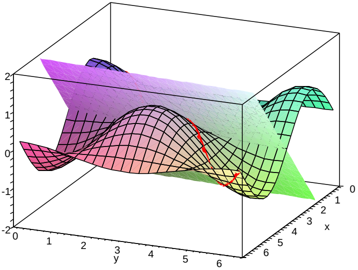
Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.





Diferenciál zadává tečné (nad)roviny funkce n proměnných.





Graf funkce $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.

Diferencovatelná funkce f na E_n v bodě $x \in E_n$ má nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod. To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.

Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}.

Obecně pro $f : E_n \to \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1}. Tato nadrovina

1. prochází bodem $(x, f(x))$
2. její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.

Plán přednášky

1. Literatura
2. Derivace a diferenciál
   - Derivace ve směru vektoru
   - Totální diferenciál
   - Tečná nadrovina ke grafu funkce
3. Derivace vyšších řádů
   - Iterované parciální derivace
   - Hessián – aproximace 2. řádu
4. Taylorova věta

Pro pevný přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ je vyčíslení diferenciálů na tomto přírůstku opět (diferenciální) operace na funkcích $f : E_n \to \mathbb{R}$

$$f \mapsto d_v f = df(v).$$

Výsledkem je $df(v) : E_n \to \mathbb{R}$. Jestliže je tato funkce opět diferencovatelná, můžeme iterovat.
Pro **parciální derivace druhého řádu** píšeme

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

v případě opakované volby $i = j$ píšeme také

$$(\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \frac{\partial}{\partial x_i})f = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Úplně stejně postupujeme při dalších iteracích a hovoříme o **parciálních derivacích k-tého řádu**

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}.$$

Theorem

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k-krát diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi až do řádu k včetně v okolí bodu $x \in \mathbb{R}^n$. Pak všechny parciální derivace nezávisí na pořadí derivování.

Definition

Je-li $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ libovolná dvakrát diferencovatelná funkce, nazýváme symetrickou matici funkcí

$$Hf(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Hessián funkce f v bodě x.

Pro křivku $c(t) = (x(t), y(t)) = (x_0 + \xi t, y_0 + \eta t)$ mají funkce

$$\alpha(t) = f(x(t), y(t))$$
$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + t \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\eta \right) + \frac{1}{2}t^2 \left(f_{xx}(x_0, y_0)\xi^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\xi\eta + f_{yy}(x_0, y_0)\eta^2 \right)$$

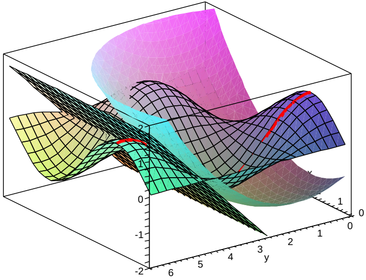
stejné derivace do druhého řádu včetně. Funkci β píšeme vektorově:

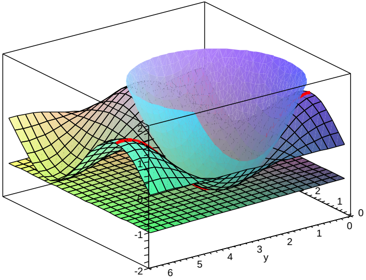
$$\beta(t) = f(x_0, y_0) + tdf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \frac{1}{2}t^2 (\xi \ \eta) \cdot Hf(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

nebo $\beta(t) = f(x_0, y_0) + tdf(x_0, y_0)(v) + \frac{1}{2}t^2 Hf(x_0, y_0)(v, v)$, kde $v = (\xi, \eta) = c'(t)$ je přírůstek zadaný derivací křivky $c(t)$ a Hessián symetrická 2–forma.

Plán přednášky

Použití Hessiánu připomíná Taylorovu větu funkcí jedné proměnné!





Tečná rovina je vynesena spolu s kvadratickým přiblížením pro funkci $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.
Obecně pro funkce $f : E_n \to \mathbb{R}$, body $x = (x_1, \dots, x_2) \in E_n$ a přírůstky $v = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ klademe

$$D^k f(x)(v) = \sum_{1 \le i_1, \dots, i_k \le n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x_1, \dots, x_n) \cdot \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}.$$

Ukažme ve dvou proměnných:
Tečná rovina: $f(x_0, y_0) + D^1(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$
Aproximace pomocí hesiánu:
$f(x_0, y_0) + D^1(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) + \frac{1}{2} D^2(x_0, y_0) f(x - x_0, y - y_0)$
výraz třetího řádu

$$D^3 f(x, y)(\xi, \eta) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\xi^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}\xi^2\eta + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}\xi\eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\eta^3$$

a obecně

$$D^k f(x, y)(\xi, \eta) = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} \frac{\partial^k f}{\partial x^{k-\ell} \partial y^\ell} \xi^{k-\ell}\eta^\ell.$$

Theorem (Taylorův rozvoj se zbytkem)

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je k–krát diferencovatelná funkce v okolí $\mathcal{O}_\delta(x)$ bodu $x \in E_n$. Pro každý přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ s velikostí $\|v\| < \delta$ pak existuje číslo $0 \le \theta \le 1$ takové, že

$$f(x+v) = f(x) + D^1 f(x)(v) + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} D^{k-1} f(x)(v) + \frac{1}{k!} D^k f(x+\theta \cdot v)(v).$$

Náznak důkazu: Pro přírůstek $v \in \mathbb{R}^n$ volíme $c(t) = x + tv$ v E_n a zkoumáme $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovanou složením $\varphi(t) = f \circ c(t)$. Taylorova věta pro funkce jedné proměnné říká:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\varphi^{(k-1)}(0)t^{k-1} + \frac{1}{k!}\varphi^{(k)}(\theta)t^k.$$

Zbývá nám tedy jen ověřit, že postupným derivováním složené funkce φ dostaneme právě požadovaný vztah. To lze provést indukcí přes řád k.