Matematika III – 3. týden
Funkce více proměnných: lokální extrémy funkcí, diferenciál zobrazení, věta o inverzním zorbazení

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

5.10. – 9. 10. 2015

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

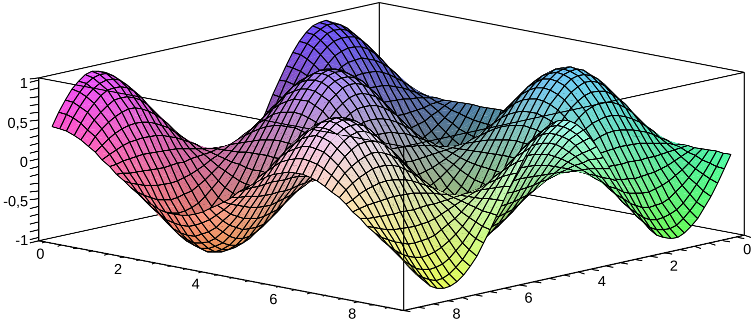
- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`

Definition

Vnitřní bod $x_0 \in E_n$ definičního oboru funkce f je (lokálním) **maximem** nebo **minimem**, jestliže existuje jeho okolí U takové, že pro všechny body $x \in U$ splňuje funkční hodnota $f(x) \leq f(x_0)$ nebo $f(x) \geq f(x_0)$. Pokud nastává v předchozích nerovnostech ostrá nerovnost pro všechny $x \neq x_0$, hovoříme o **ostrém extrému**. Vnitřní bod $x \in E_n$ definičního oboru funkce f, ve kterém je diferenciál $df(x)$ nulový nazýváme **stacionární bod funkce** f.

Nutnou podmínkou pro existenci maxima nebo minima v bodě x_0 je vymizení diferenciálu v tomto bodě, tj. $df(x_0) = 0$. Skutečně, pokud je $df(x_0) \neq 0$, pak existuje směr v, ve kterém je $d_v f(x_0) \neq 0$. Pak ovšem nutně je podél přímky $x_0 + tv$ na jednu stranu od bodu x_0 hodnota funkce roste a na druhou klesá.

Už na minulé přednášce jsme počítali s funkcí $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$, která připomíná známá kartonová plata na vajíčka



Spočtěme si první a poté druhé derivace:

$$f_x(x,y) = \cos(x)\cos(y),\;\; f_y(x,y) = -\sin(x)\sin(y),$$

takže obě derivace budou nulové pro dvě sady bodů

1. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $(x,y) = (\frac{2k+1}{2}\pi, \ell\pi)$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$
2. $\cos(x) = 0$, $\sin(y) = 0$, to je $(x,y) = (k\pi, \frac{2\ell+1}{2}\pi)$, pro libovolné $k, \ell \in \mathbb{Z}$.

Druhé parciální derivace jsou

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}(x,y) = \begin{pmatrix} -\sin(x)\cos(y) & -\cos(x)\sin(y) \\ -\cos(x)\sin(y) & -\sin(x)\cos(y) \end{pmatrix}$$

V našich dvou sadách bodů tedy dostáváme následující hessiány:

1. $Hf(k\pi + \frac{\pi}{2}, \ell\pi) = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko + nastává, když parity k a ℓ jsou stejné a naopak pro $-$,
2. $Hf(k\pi, \ell\pi + \frac{\pi}{2}) = \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, přičemž znaménko + nastává, když parity k a ℓ jsou stejné a naopak pro $-$.

Taylorova věta pro řád $k = 2$ dává okolí stacionárních bodů (x_0, y_0)

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} Hf(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))(x - x_0, y - y_0),$$

kde Hf nyní vnímáme jako kvadratickou formu vyčíslenou na přírůstku $(x - x_0, y - y_0)$. nastane lokální maximum tehdy a jen tehdy, když náš bod (x_0, y_0) patří do první skupiny se stejnými paritami k a ℓ. Když budou parity opačné, pak bod z první skupiny bude naopak bodem lokálního minima. Naopak, hessián u druhé skupiny bodů se vyčíslí kladně na některých přírůstcích a záporně na jiných. Stejně se proto bude chovat i celá funkce f v okolí.

Definition

Kvadratická forma $h : E_n \to \mathbb{R}$ je

- **positivně definitní**, je-li $h(u) > 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **positivně semidefinitní**, je-li $h(u) \geq 0$ pro všechny $u \in V$
- **negativně definitní**, je-li $h(u) < 0$ pro všechny $u \neq 0$
- **negativně semidefinitní**, je-li $h(u) \leq 0$ pro všechny $u \in V$
- **indefinitní**, je-li $h(u) > 0$ a $f(v) < 0$ pro vhodné $u, v \in V$.

1. semestr $\to$ metody, které umožňují přímo zjistit, zda daná forma má některou z těchto vlastností. (Zejména Sylverstrovo kritérium.)

Theorem

Nechť $f : E_n \to \mathbb{R}$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce a $x \in E_n$ nechť je stacionární bod funkce f. Potom

1. *f má v x ostré lokální minimum, je-li $Hf(x)$ positivně definitní,*
2. *f má v x ostré lokální maximum, je-li $Hf(x)$ negativně definitní,*
3. *f nemá v bodě x lokální extrém je-li $Hf(x)$ indefinitní.*

Všimněme si, že věta nedává žádný výsledek, pokud je hessián funkce ve zkoumaném bodě degenerovaný a přitom není indefinitní. Důvod je opět stejný jako u funkcí jedné proměnné. V takových případech totiž existují směry, ve kterých první i druhá derivace zmizí a my proto v tomto řádu přiblížení neumíme poznat, zda se funkce bude chovat jako t^3 nebo jako $\pm t^4$ dokud nespočteme alespoň v potřebných směrech derivace vyšší.

Zobrazení $F : E_n \to E_m$ je při zvolených kartézských souřadnicích na obou stranách obyčejná m–tice

$$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

funkcí $f_i : E_n \to \mathbb{R}$. Řekneme, že F je *diferencovatelné* nebo *spojitě* **diferencovatelné zobrazení**, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce $f_1, \dots, f_m$.
Diferencovatelná zobrazení $F : E_n \to E_n$, která mají inverzní zobrazení $G : E_n \to E_n$ definované na celém svém obrazu, se nazývají **(diferencovatelné) transformace**. Příkladem transformace je přechod mezi kartézkými a polárními souřadnicemi. (Pozor na definiční obor.)
Lineární zobrazení $D^1 f_i(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lineárně aproximují přírůstky jednotlivých komponent f_i.

Definition

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} df_1(x) \\ df_2(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení** F v bodě x. Lineární zobrazení $D^1F(x)$ definované na přírůstcích $v = (v_1, \dots, v_n)$ pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení** F v bodě x z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|} \big(F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)\big) = 0.$$

Důsledek Věty o existenci diferenciálu pro funkce n proměnných je:

Theorem

Nechť $F : E_n \to E_m$ je zobrazení, jehož všechny souřadné funkce mají spojité parciální derivace v okolí bodu $x \in E_n$. Pak existuje diferenciál $D^1F(x)$ zadaný Jacobiho maticí.

Theorem

Nechť $F : E_n \to E_m$ *a* $G : E_m \to E_r$ *jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor* G *obsahuje celý obor hodnot* F*. Pak také složené zobrazení* $G \circ F$ *je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního obodu* F *kompozicí diferenciálů*

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1G(F(x)) \circ D^1F(x).$$

Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.

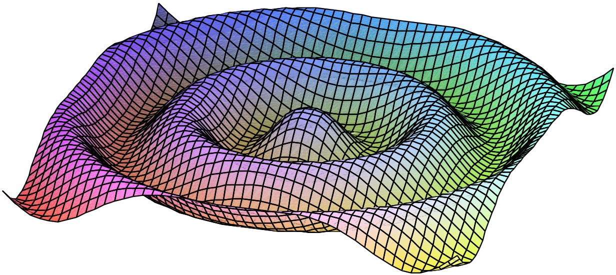
Polární souřadnice vzniknou z kartézských transformací $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kterou v souřadnicích (x, y) a (r, φ) zapíšeme:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \ \varphi = \arctan \frac{y}{x}.$$

Funkci $g_t : E_2 \to \mathbb{R}$ v polárních souřadnicích

$$g(r, \varphi, t) = \sin(\text{r-t})\,.$$

Funkce nám docela dobře přibližuje vlnění povrchu hladiny po bodovém vzruchu v počátku v čase t:



Derivace v kartézských souřadnicích:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,t) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)\\ &= \cos(\sqrt{x^2+y^2}-t)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0\end{aligned}$$

a podobně

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,t) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,\varphi)\frac{\partial r}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(r,\varphi)\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\\ &= \cos(\sqrt{x^2+y^2}-t)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Theorem

Nechť $F : E_n \to E_n$ *je spojitě diferencovatelné zobrazení na nějakém okolí bodu* $x_0 \in E_n$ *a nechť je Jacobiho matice* $D^1 f(x_0)$ *invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu* x_0 *existuje inverzní zobrazení* F^{-1} *a jeho diferenciál v bodě* $F(x_0)$ *je inverzním zobrazením k* $D^1 F(x_0)$*, tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení* F *v bodě* x_0.