Matematika III – 5. týden
Funkce více proměnných: implicitně zadané funkce, gradient, extrémy

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19. 10. – 23. 10. 2015

Obsah přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`

Připomenutí z minulé přednášky

Zobrazení $F : E_n \to E_m$,
$F(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$ je *třídy* C^1, jestliže tuto vlastnost mají všechny funkce $f_1, \ldots, f_m$.

$$D^1F(x) = \begin{pmatrix} df_1(x) \\ df_2(x) \\ \vdots \\ df_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x)$$

se nazývá **Jacobiho matice zobrazení** F v bodě x. Lineární zobrazení $D^1F(x)$ definované na přírůstcích $v = (v_1, \ldots, v_n)$ pomocí stejně značené Jacobiho matice nazýváme **diferenciál zobrazení** F v bodě x z definičního oboru, jestliže

$$\lim_{v \to 0} \frac{1}{\|v\|}(F(x+v) - F(x) - D^1F(x)(v)) = 0.$$

Zobrazení $F : E_n \to E_m$, jehož všechny souřadné funkce mají spojité parciální derivace v okolí bodu $x \in E_n$, má diferenciál $D^1F(x)$ zadaný Jacobiho maticí (tj. diferenciál je lineární zobrazení s touto maticí).

Theorem ("Chain Rule")

Nechť $F : E_n \to E_m$ a $G : E_m \to E_r$ jsou dvě diferencovatelná zobrazení, přičemž definiční obor G obsahuje celý obor hodnot F. Pak také složené zobrazení $G \circ F$ je diferencovatelné a jeho diferenciál je v každém bodě z definičního obodu F kompozicí diferenciálů

$$D^1(G \circ F)(x) = D^1G(F(x)) \circ D^1F(x).$$

Příslušná Jacobiho matice je dána součinem příslušných Jacobiho matic.

Theorem (Věta o inverzním zobrazení)

Nechť $F : E_n \to E_n$ je zobrazení třídy C^1 na nějakém okolí bodu $x_0 \in E_n$ a nechť je Jacobiho matice $D^1 f(x_0)$ invertibilní. Pak na nějakém okolí bodu x_0 existuje inverzní zobrazení F^{-1} a jeho diferenciál v bodě $F(x_0)$ je inverzním zobrazením k $D^1 F(x_0)$, tzn. je zadán inverzní maticí k Jacobiho matici zobrazení F v bodě x_0.

Věta o implicitní funkci

Pro jednoduchost vyložíme ideu v rovině E_2:
Pro spojitě diferencovatelné zobrazení $F(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ hledejme body (x,y), ve kterých platí $F(x,y)=0$. Příkladem může být třeba obvyklá (implicitní) definice přímek a kružnic:

$$F(x,y)=ax+by+c=0$$
$$F(x,y)=(x-s)^2+(y-t)^2-r^2=0,\ \ r>0.$$

V prvém případě je (při $b\neq 0$) předpisem zadaná funkce

$$y=f(x)=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$$

pro všechna x, ve druhém umíme pouze pro (a,b) splňující rovnici kružnice a $b\neq t$ najít okolí bodu a, na kterém nastane jedna z možností: $y=f(x)=t+\sqrt{(x-s)^2-r}$,
$y=f(x)=t-\sqrt{(x-s)^2-r}$.

Krajní body intervalu $[t-r, t+r]$ také vyhovují rovnici kružnice, platí v nich ale $F_y(s \pm r, t) = 0$, což vystihuje polohu tečny ke kružnici v těchto bodech rovnoběžné s osou y. V těchto bodech skutečně neumíme najít okolí, na němž by kružnice byla popsána jako funkce $y = f(x)$.
Navíc umíme i derivace:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x-s)}{\sqrt{(x-s)^2 - r^2}} = \frac{x-s}{y-t} = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Naopak, pokud budeme chtít najít závislost $x = f(y)$ takovou, aby $F(f(y), y) = 0$, pak v okolí bodů $(s \pm r, t)$ bez problémů uspějeme. Všimněme si, že v těchto bodech je parciální derivace F_x nenulová.

Zhrňme pozorování (pro pouhé dva příklady):
Pro funkci $F(x, y)$ a bod $(a, b) \in E_2$ takový, že $F(a, b) = 0$, umíme najít funkci $y = f(x)$ splňující $F(x, f(x)) = 0$, pokud je $F_y(a, b) \neq 0$. V takovém případě umím i vypočíst $f'(x) = -F_x/F_y$.
Dokážeme, že takto to platí vždy, navíc rozšířené i na libovolné počty proměnných.
Poslední tvrzení o derivaci přitom je dobře zapamatovalné (a při pečlivém vnímání věcí i pochopitelné) z výrazu pro diferenciál:

$$0 = dF = F_x dx + F_y dy = (F_x + F_y f'(x))dx.$$

Obdobně pro implicitní výrazy $F(x, y, z) = 0$, kdy hledáme funkci $g(x, y)$ takovou, že $F(x, y, g(x, y)) = 0$. Např. graf funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ (rotační paraboloid) můžeme implicitně zadat rovnicí

$$0 = F(x, y, z) = z - x^2 - y^2.$$

Jaké dimenze se mohou/mají v problému vyskytovat obecně? Pokud bychom pro naší poslední F chtěli najít křivku $c(x) = (c_1(x), c_2(x))$ v rovině takovou, že

$$F(x, c(x)) = F(x, c_1(x), c_2(x)) = 0,$$

pak to lze, ale výsledek nebude jednoznačný pro danou počáteční podmínku.

Obecný postup:
Jedna funkce $m+1$ proměnných zadává implicitně nadplochu v $\mathbb{R}^{m+1}$, kterou vyjadřujeme alespoň lokálně jako graf jedné funkce v m proměnných.
Proto n funkcí v $m+n$ proměnných bude zadávat průnik n nadploch v $\mathbb{R}^{m+n}$, což je ve „většině" případů m–rozměrný objekt.
Příklad: dvě rovnice $f(x,y,z)=0$, $g(x,y,z)=0$ v E_3 zadávají (za nějaké podmínky na derivace) křivku v E_3.

Uvažujme proto spojitě diferencovatelné zobrazení

$$F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n.$$

Jacobiho matice tohoto zobrazení bude mít n řádků a $m + n$ sloupců a můžeme si ji symbolicky zapsat jako

$$D^1F = (D_x^1F, D_y^1F) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{m+n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} & \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+1}} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{m+n}} \end{pmatrix},$$

kde $(x_1, \dots, x_{m+n}) \in \mathbb{R}^{m+n}$ zapisujeme jako $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, D_x^1F je matice s n řádky a prvními m sloupci v Jacobiho matici, zatímco D_y^1F je čtvercová matice řádu n se zbylými sloupci. Vícerozměrnou analogií k předchozí úvaze s nenulovou parciální derivací podle y je požadavek, aby matice D_y^1 byla invertibilní.

Theorem (Věta o implicitním zobrazení)

Nechť $F : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ *je zobrazení třídy* C^1 *na otevřeném okolí bodu* $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$, *ve kterém je* $F(a, b) = 0$ *a* $\det D^1_y F \neq 0$. *Potom existuje zobrazení třídy* C^1 $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ *definované na nějakém okolí* U *bodu* $a \in \mathbb{R}^m$ *s obrazem* $G(U)$, *který obsahuje bod* b, *a takové, že* $F(x, G(x)) = 0$ *pro všechny* $x \in U$. *Navíc je Jacobiho matice* $D^1 G$ *zobrazení* G *na okolí bodu* a *zadána součinem matic*

$$D^1 G(x) = -(D^1_y F)^{-1}(x, G(x)) \cdot D^1_x F(x, G(x)).$$

Dokážeme pro nejjednodušší případ rovnice $F(x, y) = 0$ s funkcí F dvou proměnných.
Rozšíříme funkci F na

$$\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (x, F(x, y)).$$

Jacobiho matice zobrazení $\tilde{F}$ je

$$D^1 \tilde{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F_x(x, y) & F_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Z předpokladu $F_y(a, b) \neq 0$ vyplývá, že totéž platí i na nějakém okolí bodu (a, b) a tam je funkce $\tilde{F}$ invertibilní a $\tilde{F}^{-1}$ je jednoznačně definované a spojitě diferencovatelné.

Nechť $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je projekce na druhou souřadnici, pak

$$f(x) = \pi \circ \tilde{F}^{-1}(x, 0)$$

je spojitě diferencovatelná funkce.
Spočteme $F(x, f(x)) = F(x, \pi(\tilde{F}^{-1}(x, 0)))$.
Z definice $\tilde{F}(x, y) = (x, F(x, y))$ vidíme, že i její inverze má tvar $\tilde{F}^{-1}(x, y) = (x, \pi\tilde{F}^{-1}(x, y))$. Proto

$$F(x, f(x)) = \pi(\tilde{F}(x, \pi(\tilde{F}^{-1}(x, 0)))) = \pi(\tilde{F}(\tilde{F}^{-1}(x, 0))) = \pi(x, 0) = 0.$$

Tím máme dokázánu první část věty a zbývá spočíst derivaci funkce $f(x)$.

Tuto derivaci můžeme odečíst opět z věty o inverzním zobrazení pomocí matice $(D^1\tilde{F})^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F_x(x,y) & F_y(x,y) \end{pmatrix}^{-1} = (F_y(x,y))^{-1} \begin{pmatrix} F_y(x,y) & 0 \\ -F_x(x,y) & 1 \end{pmatrix}.$$

Dle definice $f(x) = \pi\tilde{F}^{-1}(x,0)$ nás z této matice zajímá první položka na druhém řádku, která je právě Jacobiho maticí $D^1 f$. V našem jednoduchém případě je to právě požadovaný skalár $-F_x(x,f(x))/F_y(x,f(x))$.
Důkaz věty je ukončen. Pro obecný případ je zcela stejný, jen pracujeme s násobením matic a vektorů místo skalárů.

Gradient funkce

Definition

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $F(x_1, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se vektor

$$D^1 F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

nazývá **gradient funkce** F.
V technické a fyzikální literatuře se často zapisuje také jako grad F.

Rovnost $F(x_1, \dots, x_n) = b$ s pevnou hodnotou $b \in \mathbb{R}$ zadává podmnožinu $M \subset \mathbb{R}^n$, která mívá vlastnosti $(n-1)$–rozměrné nadplochy. Přesněji: pokud je vektor parciálních derivací nenulový, můžeme lokálně množinu M popsat jako graf spojitě diferencovatelné funkce v $n-1$ proměnných.
Hovoříme v této souvislosti také o **úrovňových množinách** M_b.

Na derivacích křivek ležících v úrovňové množině M_b se bude diferenciál dF vždy vyčíslovat nulově:
$F(c(t)) = b$ pro všechna t, proto

$$\frac{d}{dt}F(c(t)) = dF(c'(t)) = 0.$$

Pro obecný vektor $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ je velikost příslušné směrové derivace funkce F:

$$|d_v F| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} v_n \right| = \cos\varphi \|D^1 F\| \|v\|$$

kde φ je odchylka vektoru v od gradientu F. Dokázali jsme:

Theorem

Směr zadaný gradientem v bodě $x = (x_1, \dots, x_n)$ je právě ten směr, ve kterém funkce F nejrychleji roste.
Tečná rovina k neprázdné úrovňové množině M_b v okolí jejího bodu s nenulovým gradientem $D^1 F$ je určena ortogonálním doplňkem ke gradientu.

Násobkům gradientu v tomto případě říkáme **normálový vektor** nadplochy M_b.

Theorem

Pro funkci F n proměnných a bod $P = (a_1, \dots, a_n) \in M_b$ v jehož okolí je M_b grafem funkce $(n-1)$ proměnných je implicitní rovnice pro tečnou nadrovinu

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) \cdot (x_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) \cdot (x_n - a_n).$$

Example (Model osvětlení 3D objektu)

Pro 2D povrch známe směr v dopadu světla, tj. máme množinu M zadanou implicitně rovnicí $F(x,y,z)=0$ a vektor v. Intenzitu osvětlení bodu $P \in M$ pak definujme jako $I\cos\varphi$, kde φ je úhel mezi normálou zadanou gradientem a vektorem opačným ke směru světla. (Znaménko říká, kterou stranu plochy osvětlujeme.)
Např. $v=(1,1,-1)$ (tj. „šikmo dolů") a $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$. Pro bod $P=(x,y,z)\in M$

$$I(P)=\frac{\operatorname{grad} F\cdot v}{\|\operatorname{grad} F\|\|v\|}I_0=\frac{-2x-2y+2z}{2\sqrt{3}}I_0.$$

Dle očekávání je plnou intenzitou I_0 osvětlen bod $P=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$ na povrchu koule.