Matematika III – 11. týden
Momentové funkce, centrální limitní věta, příklady důležitých rozdělení

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

30.11.-4. 12. 2015

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Karel Zvára, Josef Štěpán, Pravděpodobnost a matematická pravděpodobnost statistika, Matfyzpress, 2006, 230pp.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů), Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, Základní statistické metody, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

Momenty

Podobně jako rozptyl můžeme uvažovat výrazy vyšších řádů:

$$\mu'_k = \mathrm{E}\, X^k, \quad \mu_k = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\, X)^k.$$

Nazýváme je k-tý moment a k-tý centrální moment náhodné veličiny X. Momenty lze všechny dostat jako koeficienty v mocninné řadě následujícím způsobem.

Momenty

Podobně jako rozptyl můžeme uvažovat výrazy vyšších řádů:

$$\mu'_k = \mathrm{E}\, X^k, \quad \mu_k = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\, X)^k.$$

Nazýváme je k-tý moment a k-tý centrální moment náhodné veličiny X. Momenty lze všechny dostat jako koeficienty v mocninné řadě následujícím způsobem.
Pro volný reálný parametr t definujeme **momentovou vytvořující funkci** pro náhodnou veličinu X vztahem

$$M_X(t) = \mathrm{E}\, e^{tX}.$$

Tato funkce (za docela rozumných předpokladůná sledující věty) zcela určuje náhodné veličiny a má řadu užitečných vlastností (tj. *stejná momentová funkce na nějakém netriviálním intervalu* $\Longrightarrow$ *stejná distribuční funkce*).

Theorem

Nechť X je náhodná veličina pro kterou na intervalu $(-a, a)$ existuje její analytická momentová vytvořující funkce. Pak na tomto intervalu je $M_X(t)$ dána absolutně konvergující řadou

$$M_t(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathrm{E}\, X^k.$$

Theorem

Pro součet náhodných veličin platí:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

Momentová vytvořující funkce pro $X \sim \mathrm{Bi}(0, 1)$

Často je jednodušší počítat momenty z jejich vytvořující funkce než přímo.

Momentová vytvořující funkce pro $X \sim \mathrm{Bi}(0,1)$

Často je jednodušší počítat momenty z jejich vytvořující funkce než přímo.
Pro alternativní rozdělení náhodné veličiny $Y \sim A(p)$ spočteme snadno

$$M_Y(t) = \mathrm{E}\, e^{tY} = e^0(1-p) + e^t p = p(e^t - 1) + 1.$$

Momentová vytvořující funkce pro $X \sim \mathrm{Bi}(0, 1)$

Často je jednodušší počítat momenty z jejich vytvořující funkce než přímo.
Pro alternativní rozdělení náhodné veličiny $Y \sim A(p)$ spočteme snadno

$$M_Y(t) = \mathrm{E}\, e^{tY} = e^0(1 - p) + e^t p = p(e^t - 1) + 1.$$

Protože je binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$ dáno jako součet n alternativních rozdělení $Y_i \sim \mathrm{A}(p)$, je zjevně v tomto případě

$$M(t) = M_X(t) = (p(e^t - 1) + 1)^n.$$

Momentová vytvořující funkce pro $X \sim \mathrm{Bi}(0, 1)$

Často je jednodušší počítat momenty z jejich vytvořující funkce než přímo.
Pro alternativní rozdělení náhodné veličiny $Y \sim A(p)$ spočteme snadno

$$M_Y(t) = \mathrm{E}\, e^{tY} = e^0(1-p) + e^t p = p(e^t - 1) + 1.$$

Protože je binomické rozdělení $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$ dáno jako součet n alternativních rozdělení $Y_i \sim \mathrm{A}(p)$, je zjevně v tomto případě

$$M(t) = M_X(t) = (p(e^t - 1) + 1)^n.$$

Obecně platí $\mu_k' = \frac{d^r}{dt^r} M_X(t)|_{t=0}$. Je tedy např. první moment binomického rozdělení skutečně np (první derivace $M(t)$ v nule), což je střední hodnota. Druhý moment je $np(1-p)$, čímž jsme ověřili výsledek pro rozptyl.

Momentová vytvořující funkce pro $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2)dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2tx + t^2 - t^2}{2}\right) dx \\
&= \exp(t^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) dx \\
&= \exp(t^2/2).
\end{aligned}
$$

(V předposledním řádku je integrálem dána pravděpodobnost jakékoliv hodnoty pro normální rozdělení, proto je to jednička.)

Momentová vytvořující funkce pro $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2 - 2tx + t^2 - t^2}{2}\right) dx \\
&= \exp(t^2/2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-t)^2}{2}\right) dx \\
&= \exp(t^2/2).
\end{aligned}
$$

(V předposledním řádku je integrálem dána pravděpodobnost jakékoliv hodnoty pro normální rozdělení, proto je to jednička.) Derivováním: $(M_Z)'(0) = 0$ a $(M_Z)''(0) = (te^{t^2/2})'(0) = 1$. Je tedy skutečně

$$
\mathrm{E}\, Z = 0, \quad \mathrm{var}\, Z = 1.
$$

Plán přednášky

Uvažme nezávislé náhodné veličiny Y_1, Y_2, ..., které mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1.
Předpokládejme, že třetí absolutní moment $E|Y_i|^3$ je konečný.
Pro náhodnou veličinu $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Y_i$ spočtěme momentovou funkci (koeficient $n^{-1/2}$ je volen tak, aby rozptyl S_n byl stále 1)

$$M_{S_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\, e^{(t/\sqrt{n})Y_i} = (M_Y(t/\sqrt{n}))^n,$$

kde M_Y je společná momentová funkce všech veličin Y_i.

Uvažme nezávislé náhodné veličiny $Y_1, Y_2, \dots,$ které mají všechny stejné rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem 1. Předpokládejme, že třetí absolutní moment $E|Y_i|^3$ je konečný. Pro náhodnou veličinu $S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ spočtěme momentovou funkci (koeficient $n^{-1/2}$ je volen tak, aby rozptyl S_n byl stále 1)

$$M_{S_n} = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\, e^{(t/\sqrt{n})Y_i} = (M_Y(t/\sqrt{n}))^n,$$

kde M_Y je společná momentová funkce všech veličin Y_i. Nyní

$$M_Y(t/\sqrt{n}) = 1 + 0\frac{t}{\sqrt{n}} + 1\frac{t^2}{2n} + \mathrm{o}(t^2/n)$$

a v limitě proto dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} M_{S_n}(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \mathrm{o}(1/n)\right)^n = e^{t^2/2}.$$

To je právě momentová funkce pro rozdělení N(0, 1)!

Tím jsme skoro dokázali:

Theorem (Centrální limitní věta)

Nechť $Y_1, Y_2, \dots$ *jsou nezávislé náhodné veličiny se společnou střední hodnotou* $\mathrm{E}\, Y_i = \mu$, *rozptylem* $\mathrm{var}\, Y_i = \sigma^2 > 0$ *a konečným třetím absolutním momentem* $E|Y_i|^3$. *Pro distribuční funkce náhodných veličin*

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma}(Y_i - \mu)$$

platí

$$\lim_{n\to\infty} P(S_n < x) = \Phi(x),$$

kde $\Phi(x)$ *je distribuční funkce normálního rozdělení* $\mathrm{N}(0,1)$.

Všimněme si: součty $X_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ mají střední hodnotu $n\mu$ a rozptyl $n\sigma^2$. Veličiny S_n jsou tedy právě normované veličiny X_n.

Pokud jsou $Y_i \sim \mathrm{A}(p)$ nezávislé, pak $\mathrm{E}(Y_i)^3 = p < \infty$ a všechny podmínky centrální limitní věty jsou splněny, $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$.

Pokud jsou $Y_i \sim \mathrm{A}(p)$ nezávislé, pak $\mathrm{E}(Y_i)^3 = p < \infty$ a všechny podmínky centrální limitní věty jsou splněny, $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$. Součtové veličiny $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ pak představují právě binomická rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$ a příslušné normované veličiny jsou

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right) = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

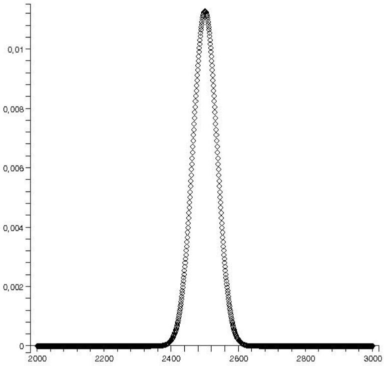
Podle centrální limitní věty má tato veličina pro velká n rozdělení velmi podobné rozdělení $\mathrm{N}(0, 1)$.

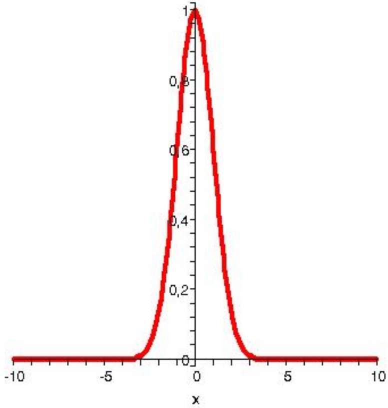
Pokud jsou $Y_i \sim \mathrm{A}(p)$ nezávislé, pak $\mathrm{E}(Y_i)^3 = p < \infty$ a všechny podmínky centrální limitní věty jsou splněny, $\mu = p$, $\sigma^2 = p(1-p)$.
Součtové veličiny $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ pak představují právě binomická rozdělení $\mathrm{Bi}(n,p)$ a příslušné normované veličiny jsou

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{Y_i - p}{\sqrt{p(1-p)}} \right) = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}.$$

Podle centrální limitní věty má tato veličina pro velká n rozdělení velmi podobné rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$.
Jinými slovy, rozdělení $\mathrm{Bi}(n,p)$ je velice blízké rozdělení $\mathrm{N}(np, np(1-p))$ pro velká n. To je obsahem tzv. Laplaceovy–Moivreovy věty. To jsme už viděli minule na obrázcích:

Pro hodnoty Bi$(5000, 0.5)$ je výsledek vidět na obrázku níže. Druhá křivka na obrázku je grafem funkce $f(x) = e^{-x^2/2}$.





Aproximace binomického rozdělení normálním se často považuje v praxi za dostatečnou, jestliže $np(1-p) > 9$

Při praktických průzkumech zpravidla věříme „zákonu velkých čísel". Potřebujeme přitom rozhodnout, jak velký vzorek už postačuje.

Typickým příkladem je např. tato úloha: Chceme zjistit poměr p osob s danou krevní skupinou A v populaci. U kolika osob je třeba krevní skupinu skutečně zjistit, abychom měli 90% pravděpodobnost, že naše zjištění se nebude lišit o více než 5%.

Při praktických průzkumech zpravidla věříme „zákonu velkých čísel“. Potřebujeme přitom rozhodnout, jak velký vzorek už postačuje.
Typickým příkladem je např. tato úloha: Chceme zjistit poměr p osob s danou krevní skupinou A v populaci. U kolika osob je třeba krevní skupinu skutečně zjistit, abychom měli 90% pravděpodobnost, že naše zjištění se nebude lišit o více než 5%.
Propočítáním zjistíme, že (nezávisle na p) vždy stačí odhadnout $p = X/n$, kde X je náhodná veličina udávající počet osob majících požadovanou skupinu, pro vzorek 270 lidí.

Plán přednášky

Rozdělení χ^2

Ve statistice budeme pracovat s charakteristikami náhodných vektorů, které budou obdobné výběrovému průměru a rozptylu, ale také s relativními poměry takových charakteristik atd. Podíváme se teď na několik takových případů.

Uvažme $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ a spočtěme hustotu $f_Y(x)$ pro $Y = Z^2$.

Evidentně je $f_Y(x) = 0$ pro $x \leq 0$, pro kladná x

$$F_Y(x) = P(Y < x) = P(-\sqrt{x} < Z < \sqrt{x})$$
$$= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-z^2/2}\, dz = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-t/2}\, dt.$$

Hustotu dostaneme derivací

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-x/2}\,.$$

Tomuto rozdělení se říká χ^2 **s jedním stupněm volnosti**, píšeme $Y \sim \chi^2$.

Gama rozdělení $Y \sim \Gamma(a, b)$

Výběrový rozptyl bude odpovídat součtům takovýchto nezávislých veličin.
Uvažme hustotu (trochu obecnějšího tvaru než u χ^2)

$$f_X(x) = cx^{a-1}\,\mathrm{e}^{-bx}$$

pro $x > 0$, zatímco $f_X(x) = 0$ pro nekladná x (χ^2 odpovídá volbě $a = b = 1/2$).
Je třeba volit $c = \frac{b^a}{\Gamma(a)}$ a jde o rozdělení $\Gamma(a, b)$.

k-tý moment takové veličiny X je

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\, X^k &= \int_0^\infty x^k \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1}\, \mathrm{e}^{-bx}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a) b^r} \int_0^\infty \frac{b^{a+k}}{\Gamma(a+k)} x^{a-1+k}\, \mathrm{e}^{-bx}\, dx \\
&= \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a) b^k}
\end{aligned}
$$

(protože integrál z hustoty rozdělení $\Gamma(a+k, b)$ v posledním upravovaném výrazu je nutně roven jedné)
Zejména tedy vidíme, že $\mathrm{E}\, X = \frac{\Gamma(a+1)}{b\Gamma(a)} = \frac{a}{b}$, zatímco

$$
\operatorname{var} X = \mathrm{E}\, X^2 - (\mathrm{E}\, X)^2 = \frac{\Gamma(a+2)}{b^2 \Gamma(a)} - \frac{a^2}{b^2} = \frac{(a+1)a - a^2}{b^2} = \frac{a}{b^2}.
$$

Momentová vytvořující funkci pro všechny hodnoty $-b < t < b$ je

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}\, dx \\ &= \frac{b^a}{(b-t)^a} \int_0^\infty \frac{(b-t)^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-(b-t)x}\, dx \\ &= \frac{b^a}{(b-t)^a}. \end{aligned}$$

Pro součet nezávislých rozdělení $Y = X_1 + \cdots + X_n$ s rozděleními $X_i \sim \Gamma(a_i, b)$ tedy okamžitě dostáváme momentovou vytvořující funkci (pro hodnoty $|t| < b$)

$$M_Y(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^{a_1+\cdots+a_n},$$

tj. $Y \sim \Gamma(a_1 + \cdots + a_n, b)$. (Velmi podstatný je přitom předpoklad, že všechna gamma rozdělení sdílí stejnou hodnotu b).

rozdělení χ^2

Jako okamžitý důsledek nyní dostáváme hustotu rozdělení veličiny $Y = Z_1^2 + \cdots + Z_n^2$, kde všechna $Z_i \sim \mathrm{N}(0,1)$. Jde totiž o gamma rozdělení $Y \sim \Gamma(n/2, 1/2)$ a má hustotu

$$f_Y(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} x^{n/2-1}\, \mathrm{e}^{-x/2}\,.$$

Tomuto speciálnímu případu gamma rozdělení říkáme rozdělení χ^2 s n **stupni volnosti**. Značíme jej zpravidla $Y \sim \chi^2_n$.

F-rozdělení

Při prorovnání výběrových rozptylů potkáme veličiny, které jsou dány podílem

$$U = \frac{X/k}{Y/m}$$

$X \sim \chi_k^2$ a $Y \sim \chi_m^2$.
Náhodná veličina $U = \frac{X/k}{Y/m}$ má hustotu $f_U(u)$

$$f_U(u) = \frac{\Gamma((k+m)/2)}{\Gamma(k/2)\Gamma(m/2)} \left(\frac{k}{m}\right)^{k/2} u^{k/2-1} \left(1 + \frac{k}{m}u\right)^{-(k+m)/2}.$$

Takovému rozdělení se říká **Fisherovo-Snedecorovo rozdělení s** k **a** m **stupni volnosti**, zkráceně také **F-rozdělení**.

t-rozdělení

Další potřebné rozdělení se objevuje při zkoumání podílu veličin $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ a $\sqrt{X/n}$, kde $X \sim \chi^2_n$ (tj. zajímá nás poměr Z a směrodatné odchylky nějakého výběru).
Dostaneme náhodnou veličinu

$$T = \frac{Z}{\sqrt{X/n}}$$

a hustotou $f_T(t)$

$$f_T(t) = \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2}.$$

Tomuto rozdělení říkáme **Studentovo t-rozdělení s** n **stupni volnosti**.