Matematika III – 4. týden
Integrace podruhé

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

12.10. – 16.10. 2015

Obsah přednášky

1. Literatura
2. Integrály závislé na parametrech
3. Integrace funkcí více proměnných
4. Násobné integrály

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Integrály závislé na parametrech

Jestliže integrujeme podle jedné proměnné x funkci $n+1$ proměnných $f(x, y_1, \ldots, y_n)$, potom výsledek bude funkcí $F(y_1, \ldots, y_n)$ v zbývajících proměnných.

Theorem

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \ldots, y_n)$ definovanou pro x z konečného intervalu $[a, b]$ a na nějakém okolí bodu $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ uvažujme integrál

$$F(y_1, \ldots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \ldots, y_n) dx.$$

Potom F je spojitá a pro všechny indexy $j = 1, \ldots, n$ platí

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \ldots, a_n) dx$$

Ověření spojitosti plyne z přímo z definice Riemannova integrálu. Ta vyčísluje pro libovolnou spojitou funkci jeho hodnotu pomocí aproximací konečnými součty (ekvivalentně horními, dolními nebo Riemannovými součty s libovolnými reprezentanty).
Tvrzení nyní okamžitě vyplývá ze skutečnosti, že spojitá funkce na kompaktní množině je ve skutečnosti stejnoměrně spojitá.
Ke zbývajícímu tvrzení se vrátíme později.

Předchozí výsledky o extrémech funkcí více proměnných nyní mají přímé použití např. pro minimalizaci ploch nebo objemů objektů zadanými funkcemi v závislosti na parametrech.
Využití je širší. Jako další příklad můžeme uvést možnost přímého derivování výsledků integrálních transformací, kterým jsme se věnovali v druhé části předchozí kapitoly sedmé.

Integrace funkcí více proměnných

Tak jak jsme motivovali integrování představou o výpočtu plochy pod grafem funkce jedné proměnné, můžeme prakticky stejně postupovat u objemu části trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných. Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.
Co jsou obory integrace?
Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.
Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastní $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.

Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \times \ldots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\ldots,j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \ldots (z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \ldots, z) dx \ldots dz$$

Pro všechny spojité funkce f opět lze dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek lze snadno rozšířit pro „dostatečně spojité" funkce na „dostatečně rozumných" oborech integrace.

Definition

Omezenou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ označujeme za **Riemannovsky měřitelnou**, jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\xi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\xi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst, okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Theorem

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset \mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.

Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěmi funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Theorem

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz =$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x,y,\dots)}^{\zeta(x,y,\dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Důkaz.

Výsledek vyplývá docela snadno přímo z definice Riemannova integrálu pomocí konečných součtů. Stačí si pečlivě hlídat vhodné poskládání jednotlivých sčítanců konečných součtů tak, aby vycházely postupně přiblížení integrálů ve vnitřních závorkách. □

Přímým důsledkem je:

Theorem (Fubiniho věta)

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ a spojitou funkci $f(x_1, \ldots, x_n)$ na S je násobný integrál

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

nezávislý na pořadí ve kterém postupně integraci provádíme.