Matematika III – 5. týden
Integrace podruhé

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

13.10. – 17.10. 2014

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

Integrály závislé na parametrech

Theorem

Pro spojitě diferencovatelnou funkci $f(x, y_1, \dots, y_n)$ *definovanou pro* x *z konečného intervalu* $[a, b]$ *a na nějakém okolí bodu* $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ *uvažujme integrál*

$$F(y_1, \dots, y_n) = \int_a^b f(x, y_1, \dots, y_n)dx.$$

Potom F *je spojitá a pro všechny indexy* $j = 1, \dots, n$ *platí*

$$\frac{\partial F}{\partial y_j}(a) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y_j}(x, a_1, \dots, a_n)dx$$

Theorem

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset \mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěmi funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěmi funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Theorem

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz =$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x,y,\dots)}^{\zeta(x,y,\dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Theorem (Fubiniho věta)

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *a spojitou funkci* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *na* S *je násobný integrál*

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

nezávislý na pořadí ve kterém postupně integraci provádíme.

Plán přednášky

Změna souřadnic při integraci

Při výpočtu integrálů funkcí jedné proměnné jsme používali transformace souřadnic jako mimořádně silný nástroj.
Obdobně lze transformace využívat pro integrály funkcí více proměnných.
Integrovaný výraz $f(x)dx$ vyjadřuje plochu obdélníčku určeného (linearizovaným) přírůstkem proměnné x a hodnotou $f(x)$. Pokud proměnnou transformujeme vztahem $x = u(t)$, vzjadřuje se i linearizovaný přírůstek jako

$$dx = \frac{du}{dt}dt$$

a proto i příslušný příspěvek pro integrál je vyjádřen jako

$$f(u(t))\frac{du}{dt}dt,$$

přičemž buď předpokládáme, že znaménko derivace $u'(t)$ je kladné, nebo dojde k obrácení mezí integrálu, takže ve výsledku se znaménko neprojeví.

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

Intuitivně je postup v n proměnných docela podobný, pouze musíme použít znalostí z lineární algebry o objemu rovnoběžnostěnů.

Theorem

Nechť $G(t_1, \dots, t_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = G(t_1, \dots, t_n)$, *je spojitě diferencovatelné zobrazení,* $S = G(T)$ *a* T *jsou Riemannovsky měřitelné množiny a* $f : S \to \mathbb{R}$ *spojitá funkce. Potom platí*

$$\int_S f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots x_n = \int_T f(G(t_1, \dots, t_n)) |\det(D^1 G(t_1, \dots, t_n))| dt_1 \dots dt_n.$$

Podrobný formální důkaz je přímočarou realizací výše uvedené úvahy ve spojení s definicí Riemannova integrálu.

Například pro integrál funkce $f(x,y)$ ve dvou proměnných a transformaci

$$G(s,t) = (g(s,t), h(s,t)).$$

Dostáváme

$$\int_{G(T)} f(x,y)dxdy = \int_T f(g(s,t),h(s,t)) \left| \frac{\partial g}{\partial s}\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial s} \right| dsdt.$$

Jako příklad spočtěme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru R (tj. její plochu)

Jako příklad spočtěme integrál z charakteristické funkce kružnice o poloměru R (tj. její plochu)
Nejprve spočítáme Jacobiho matici transformace $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

$$D^1 G = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Proto je determinant z této matice roven

$$\det D^1 G(r,\theta) = r(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = r.$$

Můžeme tedy přímo počítat pro kružnici S o poloměru R, která je obrazem obdélníku $(r,\theta) \in [0,R] \times [0,2\pi] = T$:

$$\int_S dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^R rdr\, d\theta = \int_0^R 2\pi rdr = \pi R^2.$$

Plán přednášky

Vektorový prostor všech k–lineárních antisymetrických forem na tečném prostoru $T_x U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ budeme značit $\Lambda^k (T_x \mathbb{R}^n)^*$. Stručně hovoříme o vnější k–formě v bodě x.
Přiřazení k–formy $\eta(x)$ každému bodu $x \in U$ z otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ zadává **vnější diferenciální *k*–formu** na U.
Množinu hladkých vnějších k–forem na U značíme $\Omega^k(U)$.

Vektorový prostor všech k–lineárních antisymetrických forem na tečném prostoru $T_x U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ budeme značit $\Lambda^k(T_x\mathbb{R}^n)^*$. Stručně hovoříme o vnější k–formě v bodě x.
Přiřazení k–formy $\eta(x)$ každému bodu $x \in U$ z otevřené podmnožiny v $\mathbb{R}^n$ zadává **vnější diferenciální k–formu** na U.
Množinu hladkých vnějších k–forem na U značíme $\Omega^k(U)$.
Pro hladkou parametrizaci $\varphi : V \to M$ variety M, nějaké $\eta(\varphi(u)) \in \Lambda^k(T_{\varphi(u)}\mathbb{R}^n)$ a zvolme libovolně k vektorů $X_1(u), \dots, X_k(u)$ v tečném prostoru $T_u V$. Podobně jako u lineárních forem nyní můžeme vyčíslit formu η na obrazech vektorů X_i pomocí parametrizace φ. Říkáme této operaci **stažení formy η pomocí φ**.

$$
\begin{aligned}
&\varphi^*(\eta(\varphi(u)))(X_1(u), \dots, X_k(u)) \\
&\qquad = \eta(\varphi(u))(\varphi_*(X_1(u)), \dots, \varphi_*(X_1(u))).
\end{aligned}
$$

Vnější součin a diferenciál

Máme-li dány k–formu $\alpha \in \Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$ a ℓ–formu $\beta \in \Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$ můžeme prostřídat argumenty ve všech pořadích a opatřit správným znaménkem - dostaneme $(k+\ell)$-formu:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma) \alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}).$$

Vnější součin a diferenciál

Máme-li dány k–formu $\alpha \in \Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$ a ℓ–formu $\beta \in \Lambda^k \mathbb{R}^{n*}$ můžeme prostřídat argumenty ve všech pořadích a opatřit správným znaménkem - dostaneme $(k+\ell)$-formu:

$$(\alpha \wedge \beta)(X_1, \dots, X_{k+\ell}) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{k+\ell}} \operatorname{sign}(\sigma)\alpha(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)})\beta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+\ell)}).$$

Theorem (Vnější diferenciál d)

Existuje jediné zobrazení $d : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}M$, pro všechny $M \subset \mathbb{R}^n$ a $k = 0, \dots, k$, takové že

- *d je lineární vzhledem k násobení reálnými čísly*
- *pro $k = 0$ jde o diferenciál funkcí*
- *$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge (d\beta)$, kde $\alpha \in \Omega^k(M)$*
- *pro každou funkci f na M platí $d(df) = 0$.*

Stokesova věta

Theorem

Uvažme hladkou vnější $(k-1)$*–formu* ω *s kompaktním nosičem na orientované k-rozměrné* $\bar{M} \subset \mathbb{R}^n$ *s hranicí* ∂M *se zděděnou orientací. Pak platí*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Případ $n = 2$, $k = 1$. Máme plochu M v rovině ohraničenou křivkou $C = \partial M$. Je-li forma $\omega(x,y) = f(x,y)dx + g(x,y)dy$, je $d\omega = (-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x})dx \wedge dy$. Stokesova věta tedy dává vztah

$$\int_C f(x,y)dx + g(x,y)dy = \int_M \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx \wedge dy,$$

což je jeden z klasických tvarů tzv. **Greenovy věty**.