

Algebra I – podzim 2015 – vzor písemky

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. (10 bodů) Rozhodněte, zda ... je pologrupa/monoid/grupa/okruh/obor integrity/těleso.

(*například* Rozhodněte, zda $(\mathbb{Z}, *)$, kde $*$ je operace definovaná předpisem $a * b = a + b - ab$ pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$, je pologrupa a zda je to grupa.)

nebo

Rozhodněte, zda ... je podpogrupa/podmonoid/podgrupa/normální podgrupa/podokruh/ideál v

nebo

Rozhodněte, zda předpis ... definuje homomorfismus pologrup/monoidů/grup/okruhů

2. (10 bodů) Určete podmonoid monoidu $\mathcal{T}(\{1, \dots, ?\})$ generovaný prvky

(*například* $f, g \in \mathcal{T}(\{1, 2, 3\})$ definovanými $f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 2, g(1) = 2, g(2) = 3, g(3) = 3$)

nebo

Určete všechny prvky přechodového monoidu automatu

nebo

Určete podgrupu grupy S_7 generovanou permutacemi

3. (15 bodů) Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot)/H$.

například

$$(G, \cdot) = \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R} \right\}, \cdot \right)$$
$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ bi & c & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \{-1, 1\}, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

4. (10 bodů) Rozložte polynom ... na součin nerozložitelných polynomů nad \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Q} a \mathbb{Z} (*případně* víte-li, že ...).

(*například* polynom $x^8 - 3x^7 + 4x^6 + 2x^5 - 10x^4 + 12x^3 - 8x + 8$, víte-li, že má dvojnásobný kořen $1 + i$)

5. (10 bodů) Určete minimální polynom čísla ... nad \mathbb{Q} .

nebo

Určete stupeň rozšíření tělesa $\mathbb{Q}(\dots)$ nad \mathbb{Q} .

(*číslo může být například* $1 + \sqrt{\sqrt[3]{2} - 1} \cdot i, \sqrt{3} + \sqrt[3]{\sqrt{3} + 3}, \sqrt[3]{9} - \sqrt[3]{3} + 3$)

- 6. (15 bodů)** Spočítejte inverzi čísla ... v tělese
(*například* $\sqrt[4]{2} \cdot i + \sqrt{2} + 1$ v tělese $\{a + b\sqrt[4]{2} \cdot i + c\sqrt{2} + d\sqrt[4]{8} \cdot i \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\}$)
nebo
Vyjádřete číslo $\frac{1}{\dots}$ bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.
- 7. – 9. (3 × 5 bodů)** Dejte příklad pologrupy/grupy/okruhu/homomorfismu daných vlastností. Pokud takový ... neexistuje, zdůvodněte proč.
(*například* grupy, která obsahuje prvky všech řádů *nebo* nekonečné grupy a její podgrupy indexu 10 *nebo* homomorfismů grup $\varphi, \psi: G \rightarrow H$ takových, že $\varphi(G)$ a $\psi(G)$ jsou disjunktní)
- 10. (5 bodů)** Definujte
- 11. (5 bodů)** Formulujte tvrzení
- 12. (5 bodů)** Dokažte

V příkladech 10. – 12. se může vyskytnout pouze to, co se probíralo na přednášce.