Algebra I – podzim 2015 – 3. termín

Všechna svoje tvrzení precizně zdůvodněte.

1. **(10 bodů)** Rozhodněte, zda předpis $(f * g)(r) = f(g(r) - 1)$, pro $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a $r \in \mathbb{R}$, definuje operaci na množině S všech injektivních reálných funkcí takovou, že $(S, *)$ je pologrupa, případně grupa.

2. **(10 bodů)** Určete podmonoid monoidu $\mathcal{T}(\{1, 2, 3\})$ generovaný prvky f a g definovanými $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $g(1) = 1$, $g(2) = 1$, $g(3) = 2$.

3. **(15 bodů)** Určete, které známé grupě je izomorfní grupa $(G, \cdot) \times (\mathbb{R}, +)/H$, kde

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ r & s & 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$H = \left\{ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z & 1 & 0 \\ r & s & 1 \end{pmatrix}, z \right) \mid r, s \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{Z} \right\}.$$

4. **(10 bodů)** Rozložte polynom $4x^7 - 8x^6 - 11x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 11x - 3$ na součin nerozložitelných polynomů nad $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}$.

5. **(10 bodů)** Určete minimální polynom čísla $\sqrt{\sqrt{2} + 1} + \sqrt{2} - 1$ nad $\mathbb{Q}$.

6. **(15 bodů)** Vyjádřete číslo $\frac{1}{\sqrt[3]{9} + 2 \cdot \sqrt[3]{3} + 2}$ bez použití jiných než racionálních čísel ve jmenovateli.

7. **(5 bodů)** Dejte příklad okruhu, který není tělesem, a nějakého jeho podokruhu, který tělesem je. Pokud takový okruh neexistuje, zdůvodněte proč.

8. **(5 bodů)** Dejte příklad alespoň tříprvkové grupy, v níž má každý prvek jiný řád. Pokud taková grupa neexistuje, zdůvodněte proč.

9. **(5 bodů)** Dejte příklad grupy, která obsahuje šestiprvkovou podgrupu H a desetiprvkovou podgrupu K takové, že $|H \cap K| = 1$. Pokud taková grupa neexistuje, zdůvodněte proč.

10. **(5 bodů)** Definujte prvoideál a maximální ideál.

11. **(5 bodů)** Formulujte tvrzení o rozkladu homomorfismu okruhů na tři homomorfismy speciálního typu.

12. **(5 bodů)** Dokažte, že každý monoid je izomorfní nějakému monoidu transformací nějaké množiny.