PB165 – Grafy a sítě

Grafy a algoritmy v komunikačních sítích

Organizační pokyny

Průsvitky

- pruběžná aktualizace v IS Studijní materiály

Odpovědníky v IS

- příklady na procvičení k jednotlivým přednáškám
- procvičení i dalších základních grafových témat, které byste měli znát

Hodnocení

- vnitrosemestrální písemná práce
  - body započítány 20% do výsledné známky
  - termín: na páté přednášce **29.10.**
  - 50 minut, cca 5 příkladů z obsahu proběhlých přednášek
- závěrečná písemná práce
  - body započítány 80% do výsledné známky
- podle dosažených procent:
  A $\langle 100, 89)$, B $\langle 89, 79)$, C $\langle 79, 69)$, D $\langle 69, 59)$, E $\langle 59, 55\rangle$

Obsah předmětu

- Návaznost na: IB000 Matematické základy informatiky
  IB002 Algoritmy a datové struktury I
  - zopakujte si studijní materiály IB000 a IB002 ke grafům
  - vybrané hlavní koncepty stručně zopakujeme

1. Síťové grafy
   - 2 přednášky, Rudová & Hladká
2. Plánování a rozvrhování na síťových grafech
   - 4 přednášky, Rudová
3. Modelování sítí
   - Hladká & Matyska

Obsah první části předmětu

1. Úvod do technik diskrétní matematiky pro podporu návrhu a řízení komunikačních sítí
2. Grafově teoretický koncept
3. Ukázky aplikací v komunikačních sítích

Proč diskrétní matematika a sítě?

- Teorie grafů je důkladně rozpracována a nabízí mnoho využitelných algoritmů.
- Graf představuje velmi přímočarou reprezentaci sítě na všech úrovních OSI modelu, např.:
  - Síťové prvky a jejich fyzické propojení na nejnižší vrstvě,
  - síťové aplikace a TCP spojení mezi nimi na transportní vrstvě,
  - procesy distribuovaného výpočtu a jejich komunikace na aplikační vrstvě.
- Grafy nacházejí využití i v návrhu síťových protokolů a jejich formální verifikaci.

Diskrétní matematika

- Diskrétní struktury
  - grafy
  - hypergrafy
  - kombinatorika
- Algoritmy
  - procedurální popis „krok za krokem“ problémů, které nelze řešit bezprostředně
  - složitost, NP - těžké problémy
- Matematická optimalizace
  - vývoj a implementace pro podporu rozhodování
  - problém návrhu sítí, identifikace úzkých míst
  - obchodní aspekty sítí
  - modeluje se grafy
- Distribuované výpočty
  - síť jako distribuovaný systém
  - příklad směrovací algoritmy, P2P sítě

Obsah: Typy grafů používané v počítačových sítích

- Graf, orientovaný graf, ohodnocený graf — opakování
- Multigraf
- Strom — opakování
- Kořenový strom
- n-ární strom, uspořádaný strom
- Binární strom

+

- Aplikace grafů v počítačových sítích
- Implementace grafů

Grafy a sítě

Nejjednodušší diskrétní strukturou pro modelování síťových problémů jsou grafy. Intuitivně se graf skládá z:

- **Vrcholů (uzlů)**, znázorňovaných schematicky jako „body“,
- **hran** spojujících vrcholy.

Co lze reprezentovat grafem?

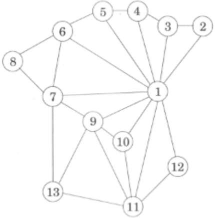
- Mapu měst a silničního spojení,
- atomy v molekule a jejich vazby,
- vodovodní, elektrické sítě

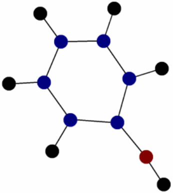
a zejména

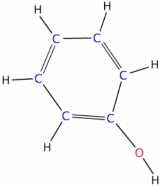
- počítačové sítě.

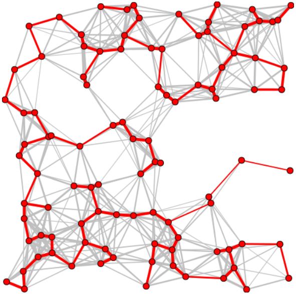
Označován také jako **jednoduchý** graf.

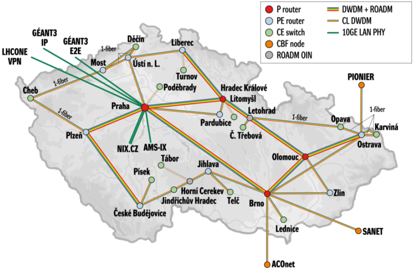
Grafy a sítě - příklady











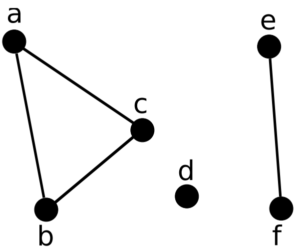
Opakování: definice grafu

Definice

Graf *G je uspořádaná dvojice množin* (V, E)*, kde*

- *V je množina* ***vrcholů*** *a*
- *E je množina* ***hran*** *– množina vybraných* ***dvouprvkových podmnožin množiny*** *V*

Vrcholy spojené hranou se nazývají **sousední**. Hrana se označuje jako **incidentní** k vrcholům, které spojuje.



$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$E = \{ \quad \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{e, f\} \quad \}$$

Opakování: Orientovaný graf

Hrany v grafu, jak byly definovány, spojují dva rovnocenné vrcholy. Takové grafy se také nazývají **neorientované**. U hran ovšem můžeme vyznačit směr, kterým vedou – hrany i graf se poté nazývají **orientované**.

Definice

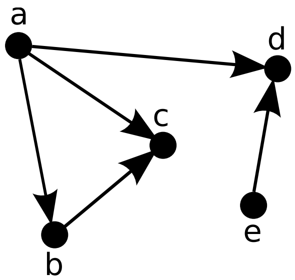
Graf, jehož hrany jsou ***uspořádané dvojice vrcholů****, se nazývá* ***orientovaný****.*

O hraně (u, v) říkáme, že **vychází z** vrcholu u a **vstupuje do** vrcholu v. Graficky se orientace hrany označí šipkou ve směru, kterým hrana vede.

Orientovaný graf - příklady

Kde najdeme orientované grafy v sítích?

- Webové stránky – graf odkazů
- DNS – hierarchická struktura domén, serverů
- Směrování – graf cest paketů k cíli



$$
\begin{aligned}
V &= \{a, b, c, d, e\} \\
E &= \{ \quad (a, b), \\
&\qquad\quad (a, c), \\
&\qquad\quad (b, c), \\
&\qquad\quad (a, d), \\
&\qquad\quad (e, d) \quad \}
\end{aligned}
$$

Multigraf

Definice grafu povoluje nejvýše 1 hranu mezi každou dvojicí vrcholů a požaduje, aby hrana spojovala různé vrcholy. Tato omezení odstraňuje multigraf:

Definice

Multigraf *je graf, jenž nahrazuje množinu hran* ***multimnožinou*** *(smí obsahovat násobné prvky) a umožňuje existenci* ***smyček*** *– hran spojujících vrchol sám ze sebou.*

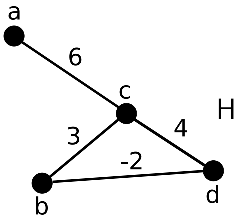
Multigraf lépe odpovídá reálným fyzickým sítím, kde se často vyskytují redundantní linky.
Smyčky mohou znázornit např. loopback – rozhraní přijímající zprávy, které samo vysílá.

Opakování: Ohodnocení grafu

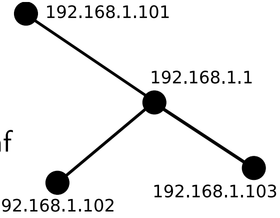
Vrcholům a hranám je možné přiřadit např. číslo či barvu.

Definice

*Přiřazení prvků konečné množiny vrcholům či hranám grafu nazýváme jejich **ohodnocením**.*



Hranově ohodnocený graf



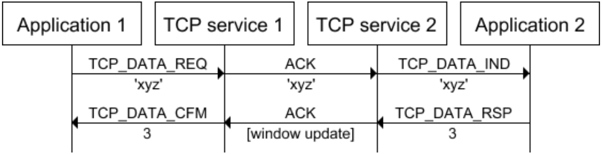
Vrcholově ohodnocený graf

Příklady ohodnocení na sítích

- Ohodnocení vrcholů:

  ohodnocení síťových zařízení L2 a L3 adresami (viz ARP protokol)
- Ohodnocení hran jako ohodnocení linek:

  Šířka pásma, latence, cena přenosu za jednotku dat
- Ohodnocení vrcholů názvem stavu, hran typem zprávy při abstraktním návrhu protokolů (MSC – Message Sequence Charts)



MSC datového přenosu pro TCP

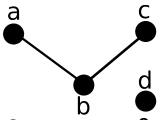
Stupeň vrcholu

Definice

Stupněm *vrcholu v neorientovaném grafu nazýváme počet hran incidentních k vrcholu.*

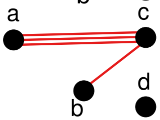
- Počet klientů připojených k Wi-Fi AP
- Počet uzavřených spojení spojovaného protokolu (např. TCP)

Stupeň vrcholu u značíme $deg(u)$.



$deg(a) = 1$ $\quad deg(c) = 1$

$deg(b) = 2$ $\quad deg(d) = 0$



$deg(a) = 3$ $\quad deg(c) = 4$

$deg(b) = 1$ $\quad deg(d) = 0$

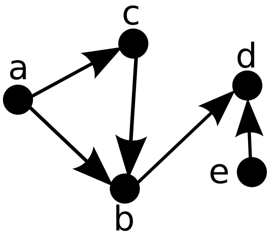
Stupeň vrcholu v orientovaném grafu

V případě orientovaného grafu rozlišujeme **vstupní** a **výstupní** stupeň.

Definice

Vstupním *(**výstupním**) stupněm vrcholu u neorientovaného grafu nazýváme počet hran vstupujících do, resp. vycházejících z vrcholu u a značíme jej* $deg^{+}(u)$, *resp.* $deg^{-}(u)$.

- V grafu odkazů mezi webovými stránkami reprezentuje vstupní stupeň počet odkazů na vedoucích stránku.



vrchol	deg^{-}	deg^{+}
a	2	0
b	1	2
c	1	1
d	0	2
e	1	0

Sledy v grafu

Definice

Sledem *v grafu (neorientovaném grafu) nazýváme posloupnost vrcholů a hran*

$$v_0, e_1, v_1, \dots, e_n, v_n,$$

kde každá hrana e_i *spojuje vrcholy* v_{i-1}, v_i, *resp. vede z* v_{i-1} *do* v_i.

- Sled v grafu je tedy „trasou“, na které se mohou vrcholy i hrany opakovat.
- Samostatný vrchol je také sledem.
- Se sledy se lze setkat i v reálných sítích:
  - Cesta paketu sítí (některé směrovací algoritmy nezabraňují zacyklení paketu v průběhu výpočtu).

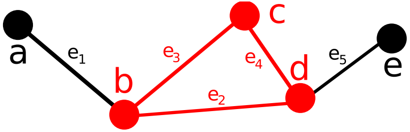
Cesty v grafu

Definice

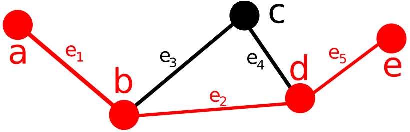
Cesta *v grafu je sled bez opakování vrcholů.*

V cestě se v důsledku neopakování vrcholů nemohou opakovat ani hrany.

- Cesty definující směrování paketů mezi dvojicemi síťových prvků.



$b, e_3, c, e_4, d, e_2, b$ je sledem v grafu, ale nikoliv cestou – vrchol b se opakuje.



$a, e_1, b, e_2, d, e_5, e$ je sledem i cestou v grafu.

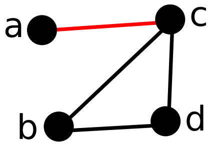
Souvislost grafu

Definice

Souvislý *graf je takový (neorientovaný) graf, pokud mezi jeho každými dvěma vrcholy vede cesta.*

Definice

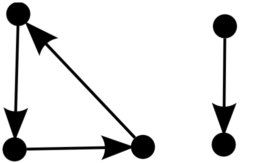
Nahradíme-li všechny hrany orientovaného grafu G neorientovanými a získáme-li tak souvislý graf, G je ***slabě souvislý****.*
Orientovaný graf je ***silně souvislý****, pokud mezi každými dvěma jeho vrcholy vedou cesty v obou směrech.*

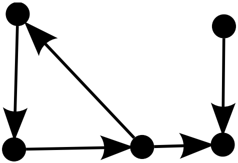


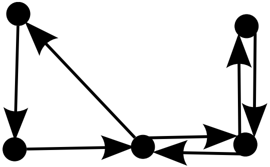
Tento graf je souvislý; po odebrání vyznačené hrany by souvislý nebyl, odebrání jedné z nevyznačených hran by jeho souvislost zachovalo.

Souvislost grafu – příklady

- Internet na fyzické vrstvě tvoří souvislý graf.
- Internet na IP vrstvě tvoří slabě souvislý (ovšem silně nesouvislý) orientovaný graf (adresy za NAT).
- Orientovaný graf webových stránek není silně ani slabě souvislý.







Grafy na obrázcích jsou:

1. Nesouvislý
2. Slabě souvislý
3. Silně souvislý

Implementace grafu

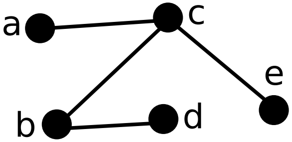
Jak efektivně uložit graf v paměti počítače či aktivního síťového prvku? Vrcholy označíme čísly $1 \dots n$. Pro uložení hran máme dvě základní možnosti:

- **matice sousednosti,**
- **seznamy sousedů.**

Matice sousednosti

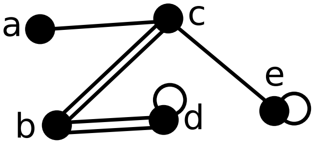
- matice E o rozměrech $n \times n$ pro n vrcholů grafu
- $E_{ij} = 1$ pokud hrana (i, j) patří do grafu
- $E_{ij} = 0$ jinak
- pro neorientovaný graf je symetrická
  pro orientovaný graf nemusí být symetrická

Matice sousednosti



	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	1	1	0
c	1	1	0	0	1
d	0	1	0	0	0
e	0	0	1	0	0

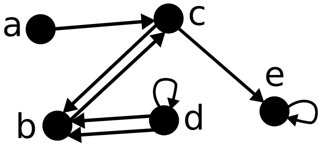
V této podobě je matice sousednosti vhodná jen pro reprezentaci jednoduchého grafu. Multigraf lze reprezentovat maticí sousednosti, jejíž prvky udávají počet hran mezi každými dvěma vrcholy:



	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	2	2	0
c	1	2	0	0	1
d	0	2	0	1	0
e	0	0	1	0	1

Obdobně lze ukládat jednoduchý hranově ohodnocený graf.

Matice sousednosti pro orientovaný multigraf



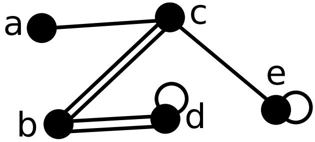
	a	b	c	d	e
a	0	0	1	0	0
b	0	0	1	0	0
c	0	1	0	0	1
d	0	2	0	1	0
e	0	0	0	0	1

Seznamy sousedů

Pro každý vrchol existuje samostatný seznam sousedů, s nimiž je vrchol spojen hranou (či do nich vede orientovaná hrana).

- Lze implementovat pomocí 2 jednorozměrných polí:
  - V jednom jsou uloženy všechny seznamy za sebou, seřazené podle čísla vrcholu
  - Druhé uchovává indexy, na kterých začínají v prvním poli sousedé každého vrcholu
- Násobné hrany v multigrafu jsou zadány násobným uvedením vrcholu v seznamu sousedů

Seznamy sousedů – příklad



Pole indexů do seznamu sousedů:

a	b	c	d	e
1	2	6	10	13

Seznam sousedů:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
c	c	c	d	d	a	b	b	e	b	b	d	c	e

Seznamy sousedů – počítačové sítě

- Tato reprezentace prostřednictvím dvou polí je pro počítačové sítě výhodnější než reprezentace pomocí seznamů provázaných ukazateli (viz IB002).
  - připomenutí: **seznam sousedů pomocí ukazatelů**
    - pole velikosti $|V|$ pro jednotlivé vrcholy
    - od každého prvku pole (vrcholu i):
      seznam provázaný ukazateli odkazující na sousedy vrcholu i
  - u počítačových sítí nedochází k častým změnám struktury grafu
- Pro „řídké“ grafy (výrazně méně než n^2 hran) jsou seznamy sousedů výhodnější z hlediska paměťové náročnosti než matice sousednosti. Takových grafů je mezi sítěmi většina.

Kružnice a cyklus v grafu

Definice

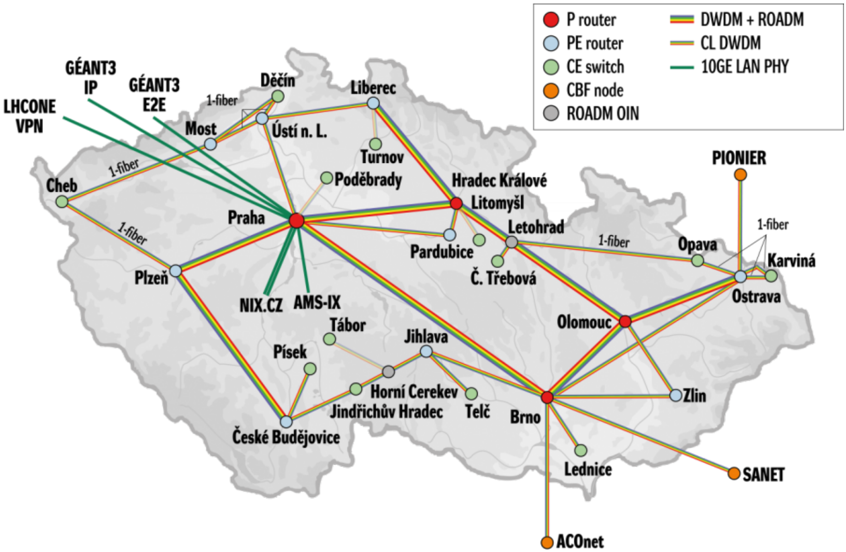
Kružnice *(uzavřená cesta) v grafu je netriviální* neorientovaná cesta, která začíná i končí ve stejném vrcholu.* ***Orientovaná kružnice (také cyklus)*** *je kružnice složená z orientovaných hran respektující orientaci těchto hran.*

* triviální cesta obsahuje jeden vrchol

Příklady

- V Internetu existuje mnoho redundantních linek – graf jeho fyzického propojení je cyklický.
- Lokální ethernetové sítě mají acyklickou topologii.
- Sítě založené na technologii Token Ring mají logickou kruhovou topologii.
- Sítě SONET podporují zapojení do kruhu.

Topologie sítě CESNET

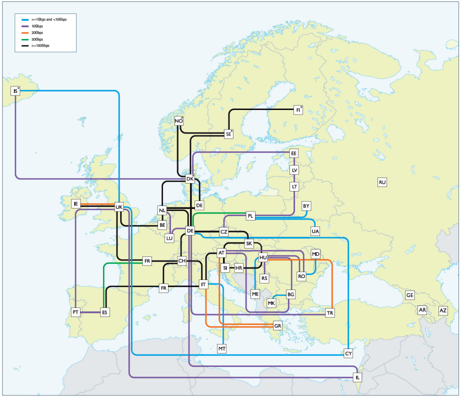


Topologie sítě GÉANT

GÉANT www.geant.net

The Pan-European Research and Education Network

GÉANT interconnects Europe's National Research and Education Networks (NRENs). Together we connect over 50 million users at 10,000 institutions across Europe.



GÉANT connectivity as at January 2014. GÉANT is operated by DANTE on behalf of Europe's NRENs.

AR Armenia	BG Bulgaria	DE Germany	FI Finland*	HR Croatia	IS Iceland*	LV Latvia	NL Netherlands	RO Romania	SE Sweden*	TR Turkey
AT Austria	CH Switzerland	DK Denmark*	FR France	HU Hungary	IT Italy	ME Montenegro	NO Norway*	RS Serbia	SI Slovenia	UK United Kingdom
AZ Azerbaijan	CY Cyprus	EE Estonia	GE Georgia	IE Ireland	LT Lithuania	MK F.Y.R. Macedonia	PL Poland	BY Belarus	MD Moldova	UA Ukraine
BE Belgium	CZ Czech Republic	ES Spain	GR Greece	IL Israel	LU Luxembourg	MT Malta	PT Portugal	RU Russia	SK Slovakia	

*Connections between these countries are part of NORDUnet (the Nordic regional network)

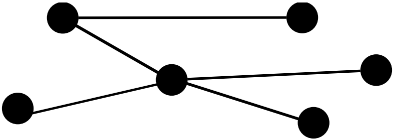
Opakování: Strom

Definice

Les *je graf, který neobsahuje kružnice.* ***Strom*** *je graf, který neobsahuje kružnice a je souvislý.*

- Strom je tedy souvislý les.
- Lokální ethernetová síť je strom, protože je souvislá a acyklická.

Jednoduchý příklad stromu



Kořenový strom

Definice

Strom, jehož hrany jsou orientované, se nazývá také ***orientovaný****.*

*Orientovaný strom, jenž má určen význačný vrchol (****kořen****) r, a v němž existuje orientovaná cesta z r do všech ostatních vrcholů, se nazývá* ***kořenový strom****.*

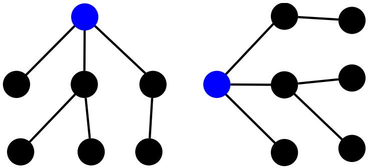
- Při kreslení kořenových grafů se obvykle vynechávají šipky definující orientaci hran, předpokládá se, že směřují „od kořene".
- Vzhledem k absenci cyklů je interpretace jednoznačná.

Kořenový strom – příklady

Kde v sítích najdeme kořenové stromy?

- DNS – hierarchická struktura serverů obsluhujících domény různých úrovní.
- Multicast – zdroj je kořenem, cesty k příjemcům tvoří strom.

Dvě obvyklá kreslení kořenového stromu. Kořen je vyznačen modře.



Vztah orientovaných a kořenových stromů

Každý kořenový strom je orientovaný. Jaké jsou podmínky pro to, aby byl orientovaný strom zároveň kořenovým?

Věta

Orientovaný strom je kořenový právě tehdy, když právě jeden z jeho vrcholů má vstupní stupeň 0 a všechny ostatní vrcholy 1.

Důkaz.

$\Rightarrow$ Nechť r je kořen stromu a jeho vstupní stupeň je vyšší než 0. Potom do něj vede hrana z některého z ostatních vrcholů stromu. Do toho ovšem vede cesta z kořene, v grafu je tedy cyklus, čímž docházíme ke sporu.
Pokud do některého z ostatních vrcholů (označme jej u) vedou více než 2 hrany (z různých vrcholů v, w), potom do něj vedou 2 cesty z kořene, a to skrze cesty do v, w. Tím opět docházíme ke sporu. $\square$

Vztah orientovaných a kořenových stromů – pokračování důkazu

Orientovaný strom je kořenový právě tehdy, když právě jeden z jeho vrcholů má vstupní stupeň 0 a všechny ostatní vrcholy 1.

Důkaz.

$\Leftarrow$ Označme r vrchol, jehož vstupní stupeň je 0. Poté pro každý jiný vrchol w platí následující:

- Vstupní stupeň w je roven 1. Existuje tedy právě jeden vrchol, u_1, z nějž vede do w hrana. Není-li u_1 totožný s r, vede do něj opět hrana z právě jednoho vrcholu, u_2. Takto tvořená řada vrcholů, z nichž vede cesta do w, je nutně konečná, neboť strom je acyklický, tudíž se v ní žádný z vrcholů nemůže opakovat. Posledním vrcholem v této posloupnosti musí být r.

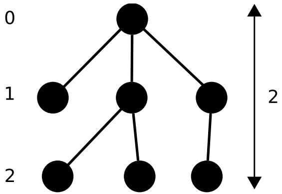
Do každého vrcholu stromu tedy vede orientovaná cesta z vrcholu r a ten je tudíž kořenem stromu. $\square$

Hloubka vrcholů a výška stromů

Definice

Vzdálenost (počet hran na cestě) vrcholu od kořene stromu se nazývá ***hloubka*** *či* ***úroveň*** *vrcholu.*

- Hloubka kořene je rovna 0.
- Je zvykem kreslit vrcholy jedné úrovně ve stejné výšce.



Definice

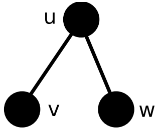
Výškou *kořenového stromu označujeme nejvyšší z hloubek všech jeho vrcholů.*

Rodiče a sourozenci v kořenových stromech

Definice

Vede-li v kořenovém stromu hrana z vrcholu u do v, nazývá se u ***rodičem (otcem)*** *v a v* ***synem (potomkem)****. Vrcholy mající společného rodiče nazýváme* ***sourozenci****.*

Vrchol u je rodičem obou vrcholů v, w, které jsou sourozenci.

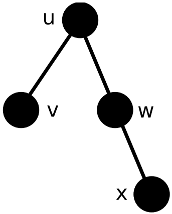


Listy a vnitřní vrcholy stromu

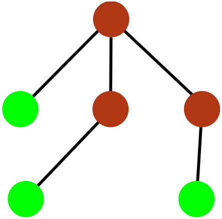
Definice

*Vrchol u je **předkem** vrcholu v, pokud leží na cestě z r do v. v se v takovém případě nazývá **následníkem** vrcholu u.*

Vrcholy v, w, x jsou následníky vrcholu u. Vrchol w má jediného následníka x. Předky x jsou u, w.



Listy jsou vyznačeny zeleně, vnitřní vrcholy stromu hnědě.



Definice

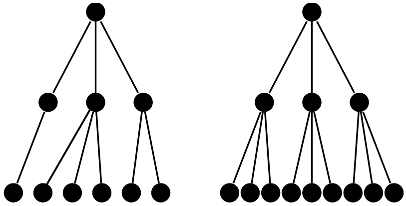
*Vrchol, který nemá žádné potomky, nazýváme **list** stromu. Ostatní vrcholy se označují jako **vnitřní**.*

n-ární, úplné stromy

Definice

*Kořenový strom, jehož každý vrchol má nejvýše n potomků, se nazývá n-**ární**. n-árnı́ strom, jehož vnitřní vrcholy mají právě n potomků a všechny listy jsou stejné hloubky, se nazývá **úplný** n-**ární**.*

Levý strom je 3-ární (ternární), pravý je úplný ternární.



Uspořádané stromy

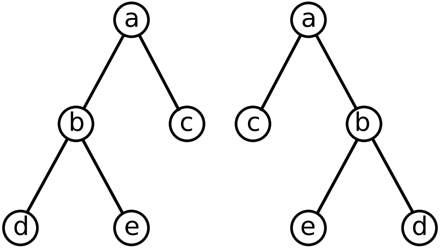
V některých případech může být výhodné potomky každého vrcholu jednoznačně pojmenovat a seřadit:

Definice

Uspořádaný *strom je kořenový strom s daným pořadím potomků každého vrcholu.*

Při kreslení uspořádaného grafu se dané pořadí vrcholů dodržuje ve směru zleva doprava.

Isomorfní * kořenové stromy s různým uspořádáním.



* Zopakujte si pojem isomorfismus.

Počet vrcholů úrovně stromu

Pro každou úroveň n-árního stromu je dán limit počtu vrcholů v této úrovni:

Věta

V m-té úrovni n-árního stromu se nachází nejvýše n^m vrcholů.

Důkaz.

Indukcí:
Pro kořen platí triviálně: $n^0 = 1$.
Nechť je v úrovni k právě n^k vrcholů. Každý z nich může mít nejvýše n potomků. Úroveň $k + 1$ tedy obsahuje nejvýše $n * n^k = n^{k+1}$ vrcholů. □

Binární stromy

Speciálním (a prakticky nejpoužívanějším) n-árním stromem je strom **binární**.

Definice

*Uspořádaný 2-ární strom se nazývá **binární**. Potomci každého vrcholu jsou označováni jako **levý** a **pravý**.*

- Každý kořenový strom lze převést na binární.
- Vnitřní algoritmy směrovacích zařízení mohou být založeny na binárních stromech.

Podstromy binárních stromů

Definice

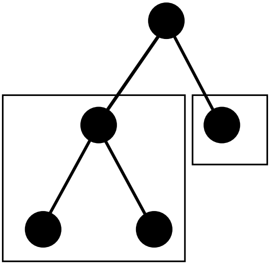
Indukovaný podgraf binárního stromu G, tvořený jedním potomkem vrcholu v a všemi jeho následníky, se nazývá* ***podstromem*** *vrcholu v a stromu G.*

- Podstrom binárního stromu je také binárním stromem.
- Každý vrchol má **levý** a **pravý** podstrom, přičemž jeho levý, resp. pravý, potomek je kořenem tohoto podstromu.
- Pravý a levý podstrom binárního stromu o výšce h mají výšku nejvýše $h-1$, přičemž nejméně jeden z nich má výšku právě $h-1$.

* Zopakujte si pojmy podgraf a indukovaný podgraf.

Podstromy binárních stromů – příklad

Obrázek : Levý a pravý podstrom kořene stromu.



Počet vrcholů úplného binárního stromu

Věta

Úplný binární strom výšky h má právě $2^{h+1} - 1$ vrcholů.

Důkaz.

Indukcí:
Pro binární strom výšky 0 platí zřejmě.
Nechť strom výšky k má právě $2^{k+1} - 1$ vrcholů. Jak bylo dokázáno dříve *, $(k+1)$-ní vrstva obsahuje 2^{k+1} vrcholů. Strom výšky $k+1$ tedy má

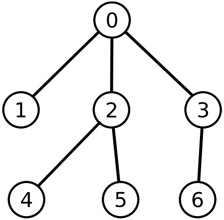
$$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2 * 2^{k+1} - 1 = 2^{k+2} - 1$$

vrcholů. □

* Víme: V m-té úrovni n-árního stromu se nachází nejvýše n^m vrcholů.

Reprezentace kořenových stromů

- Kořenové stromy lze jednoznačně reprezentovat **polem rodičů** – tedy polem, ve kterém je pro každý vrchol uložen pouze název jeho rodiče.
- Taková reprezentace je prostorově velmi výhodná (lineární prostorová složitost).



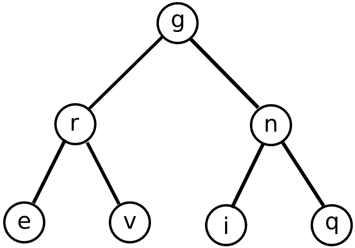
Pole rodičů má tvar: `- 0 0 0 2 2 3`.

Cvičení:

- Nakreslete kořenový strom podle zadaného pole rodičů:
  `- 0 1 1 2 2 3 4 4`

Reprezentace úplných ohodnocených stromů

- Obdobně výhodně lze reprezentovat úplné ohodnocené stromy.
- Každý vrchol může mít v lineárním poli pevně danou pozici.
- Na této pozici je v poli uloženo ohodnocení vrcholu.
- Konkrétně pro binární strom:
  - Kořen je uložen na pozici 0.
  - Potomci vrcholu k jsou uloženi na pozicích $2 * k + 1, 2 * k + 2$.



Pole reprezentující tento binární graf obsahuje hodnoty `g r n e v i q`.

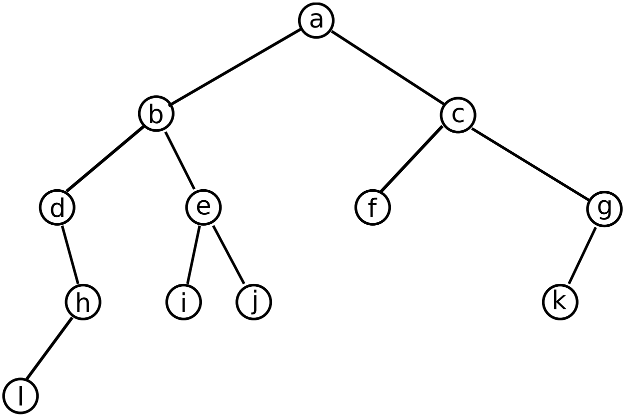
Průchod binárním stromem

V některých případech (např. synchronizace distribuovaných algoritmů a výpočtů) je potřebné projít všemi vrcholy grafu a vykonat nějakou akci. Průchod binárním stromem je možné provést 2 základními způsoby:

1. průchod po úrovních
2. průchod po podstromech

Průchod binárním stromem po úrovních

```
Vlož kořen do fronty.
Dokud je fronta neprázdná:
  Odstraň její první vrchol a proveď akci.
  Vlož do fronty jeho potomky v daném pořadí.
```



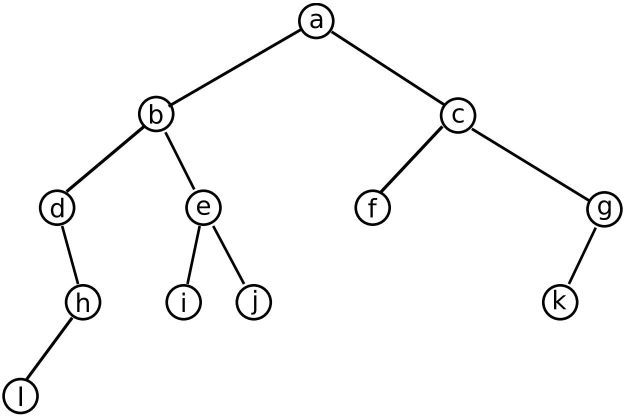
Vrcholy stromu jsou navštíveny v pořadí $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$.

Průchod binárním stromem po podstromech

```
Proveď akci v kořenu stromu.
Spusť algoritmus průchodu v levém podstromu.
Spusť algoritmus průchodu v pravém podstromu.
```

- Tato verze algoritmu je rekurzivní. Průchod je možné implementovat iterativně bez rekurzivních volání za použití zásobníku.
- Akci lze také provádět po průchodu levým či oběma podstromy.

Průchod po podstromech – příklad



Vrcholy stromu jsou navštíveny v pořadí $a, b, d, h, l, e, i, j, c, f, g, k$.

Cvičení:
V jakém pořadí budou vypsány vrcholy, pokud bude výpis vrcholu proveden 1) po průchodu levým podstromem; 2) po průchodu oběma podstromy?