

# **PV021: Neuronové sítě**

**Tomáš Brázdil**

# Organizační poznámky

## Zdroje:

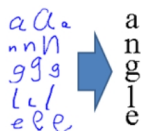
- ▶ **hlavní zdroj:** přednáška
- ▶ Jiří Šíma a Jan Neruda, Teoretické otázky neuronových sítí  
<http://www2.cs.cas.cz/~sima/kniha.pdf>  
(nás se týká především Část I.)
- ▶ (přednáška je založena na částech dalších knih, např. Christopher M. Bishop, Pattern Recognition and Machine Learning)

## Závěrečné hodnocení:

- ▶ projekt
  - ▶ dvoučlenné týmy; implementace vybraného modelu + analýza vlastních dat
  - ▶ implementace v jazycích C++ nebo Java bez využití knihoven pro strojové učení a data mining
  - ▶ data pokud možno reálná, která je nutno připravit pro analýzu
- ▶ ústní zkouška (cokoliv z přednášky *včetně důkazů, které budu psát na tabuli*)

# Strojové učení obecně

- ▶ Strojové učení = konstrukce systémů, které se mohou učit z dat (a tudíž je není třeba explicitně programovat)
  - ▶ spam filter
    - ▶ učí se na databázi “označkových” emailů
    - ▶ poté samostatně rozpozná nový spam
  - ▶ čtečka rukou psaných písmen
    - ▶ učí se na databázi rukou psaných písmen s označením správné odpovědi
    - ▶ poté samostatně rozpoznává písmena
  - ▶ ...
  - ▶ a další obrovské množství aplikací ...
- ▶ Základní požadavky na daný učící algoritmus:
  - ▶ **reprezentace**: schopnost zachytit strukturu učících dat
  - ▶ **generalizace**: schopnost dobře fungovat na nových datech



Učení (obvykle) spočívá v konstrukci matematického modelu dat a jeho následné aplikaci na nová data.

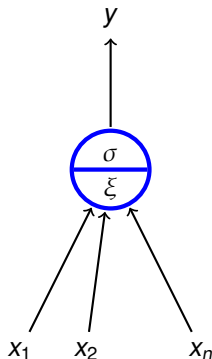
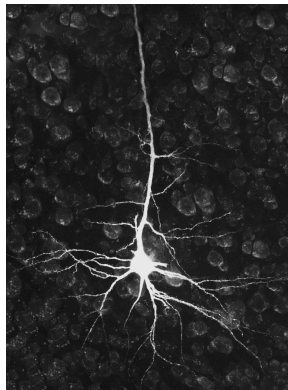
Existuje mnoho druhů modelů:

- ▶ rozhodovací stromy
- ▶ induktivní logické programování
- ▶ Bayesovské sítě (a tzv. grafické modely)
- ▶ **neuronové sítě**
- ▶ support vector machines
- ▶ skryté Markovovy modely
- ▶ ...

Neuronové sítě, vycházející z modelů lidského mozku, jsou přirozeným základem pro učící algoritmy!

# Co jsou umělé neuronové sítě

- ▶ **Umělý neuron** je *hrubou matematickou aproximací* biologického neuronu.
- ▶ **(Umělá) neuronová síť** se skládá ze vzájemně propojených (umělých) neuronů. "Schopnosti" sítě jsou zakódovány v síle spojů mezi neurony.



Modelování biologických neuronových sítí (computational neuroscience).

- ▶ zjednodušený matematický model pomáhá identifikovat důležité mechanismy
  - ▶ Jak mozek přijímá a zpracovává informace?
  - ▶ Jak uchovává informace?
  - ▶ Jak se mozek vyvíjí?
  - ▶ ...
- ▶ neurovědy jsou silně multidisciplinární - precizní (matematický) popis usnadňuje komunikaci mezi odborníky na jednotlivé podoblasti

Této oblasti se nebudu příliš věnovat!

Neuronové sítě ve strojovém učení.

- ▶ Většinou mnohem “primitivnější” modely, které se postupně odchyľují od biologické motivace.
- ▶ Silně zaměřené na aplikace v různých oblastech, např.
  - ▶ řízení a rozhodování - autonomní řízení vozidel, řízení výrobních procesů, zpráva přírodních zdrojů
  - ▶ hry - vrhcáby, poker
  - ▶ finančnictví - vývoj cen akcií a měnových kurzů, analýza rizik, dělení klientů do specifických skupin
  - ▶ medicína - diagnostika, zpracování signálu (EKG, EEG, ...), analýza obrazu (MRI, rentgen, ...)
  
  - ▶ další rozpoznávání vzorů - rozpoznávání řeči, textu, obrazu, radarových a sonarových signálů
  - ▶ zpracování signálu - filtrace, odstranění šumu
  - ▶ ...

Této oblasti se budu věnovat!

# Významné vlastnosti neuronových sítí

- ▶ Masivní paralelismus
  - ▶ mnoho pomalých výpočetních prvků zpracovává informace paralelně na mnoha úrovních
- ▶ Adaptace a učení
  - ▶ dítě se naučí poznat králíka poté, co se mu ukáže několik králíků
- ▶ Schopnost generalizace
  - ▶ po shlédnutí několika králíků je dítě schopno poznat další (jiné) králíky
- ▶ Odolnost vůči nepřesnosti vstupu
  - ▶ rozmazaná fotka králíka může být stále klasifikována správně jako obraz králíka
- ▶ Odolnost vůči poškození
  - ▶ mnoho experimentů prokázalo, že i poškozená neuronová síť je stále schopna uspokojivě fungovat
  - ▶ poškozená síť se může přeadaptovat, stávající neurony mohou převzít funkci poškozených



- ▶ Na co se zaměříme
  - ▶ Základní techniky a principy neuronových sítí (NS)
  - ▶ Přehled základních modelů NS a jejich použití
- ▶ Co si (doufám) odnesete
  - ▶ Znalost základních modelů NS  
(perceptron, vícevrstvá síť, hluboké sítě, Hopfieldova síť, Boltzmannův stroj, Kohonenova mapa)
  - ▶ Znalost jednoduchých aplikací těchto modelů
  - ▶ Znalost základních principů učení NS
  - ▶ Přehled elementárních "implementačních" technik pro učení a aplikaci NS
  - ▶ přehled některých souvisejících modelů a technik  
(redukce dimenze dat, PCA)

## Základy neuronových sítí

- ▶ Biologický neuron a neuronová síť
- ▶ Formální neuron
- ▶ Neuronové sítě a jejich dynamika

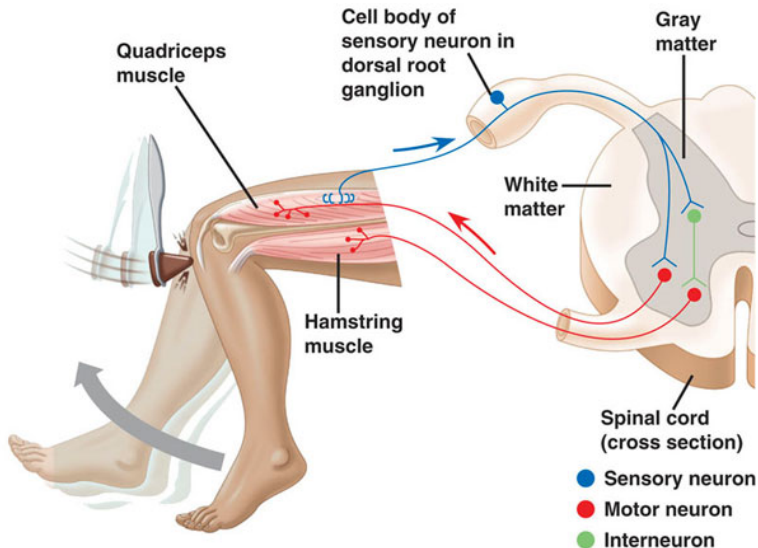
# Biologická neuronová síť

- ▶ Nervová soustava člověka se skládá z přibližně  $10^{11}$  neuronů (centimetr krychlový lidského mozku obsahuje až 50 milionů nervových buněk)
- ▶ Každý neuron je spojen s přibližně  $10^4$  neurony
- ▶ Neurony jsou velmi komplexní systémy

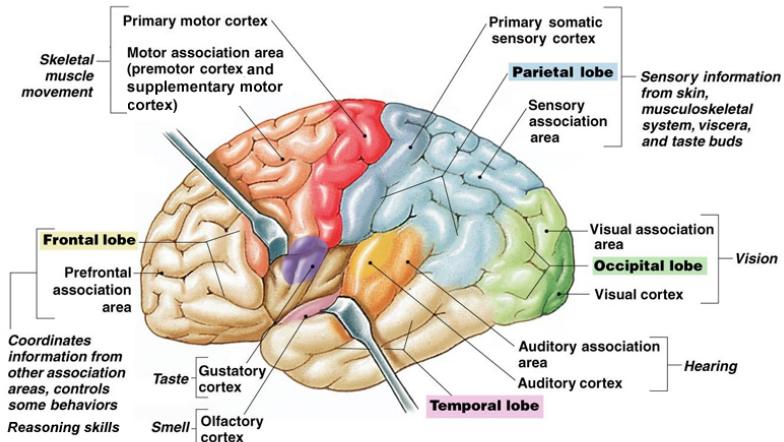
Velmi hrubý popis funkce nervové soustavy:

- ▶ Vnější podněty jsou přijímány *receptory* (např. buňky oka).
- ▶ Informace jsou dále přenášeny pomocí periferní nervové soustavy (PNS) do centrální nervové soustavy (CNS - mícha, mozek) kde jsou zpracovávány (integrovány)
- ▶ Po zpracování informace jsou (pomocí PNS) případně aktivovány *efektory* (např. svalové buňky)

# Biologická neuronová síť - příklad



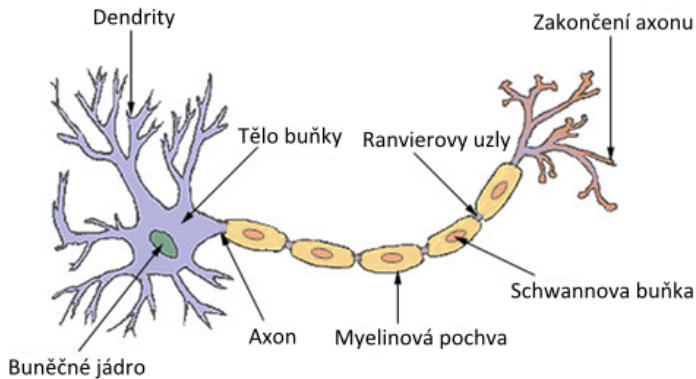
# Mozková kůra



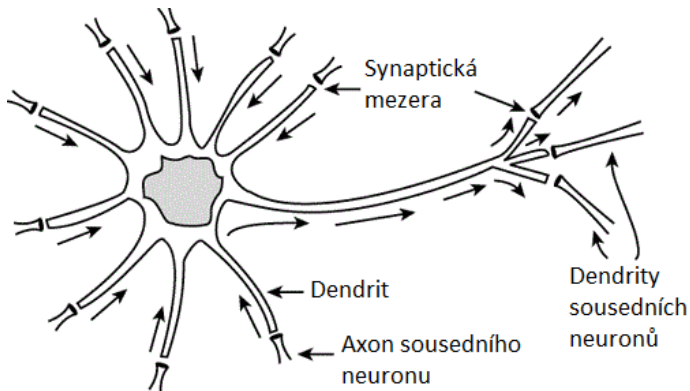
Copyright © 2007 Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.

Fig. 9-15

# Biologický neuron

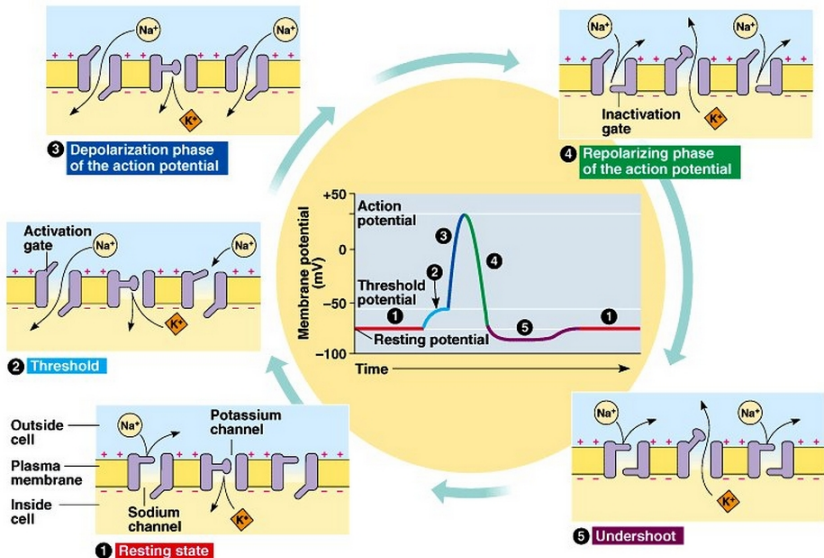


# Sumace a akční potenciál



- ▶ Klidový potenciál v těle neuronu  $\approx -70$  mV
- ▶ Vnější podněty mění potenciál v axonovém hrbolku
- ▶ Po překročení prahu  $\approx -50$  mV je generován *akční potenciál*  $\approx 40$  mV
- ▶ Poté nastane krátká *refrakce*  $\approx -80$  mV
- ▶ akční potenciál se šíří axonem, v axonovém zakončení vyvolá chemický proces, který změní potenciál v sousedním neuronu

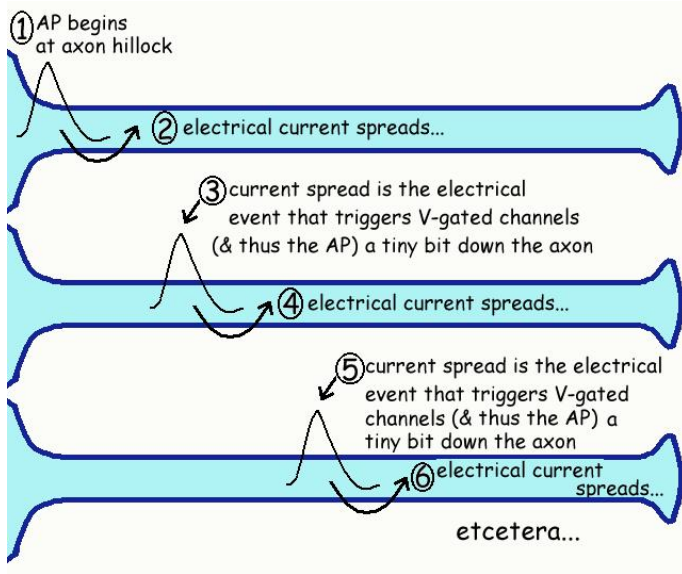
# Akční potenciál - podrobněji



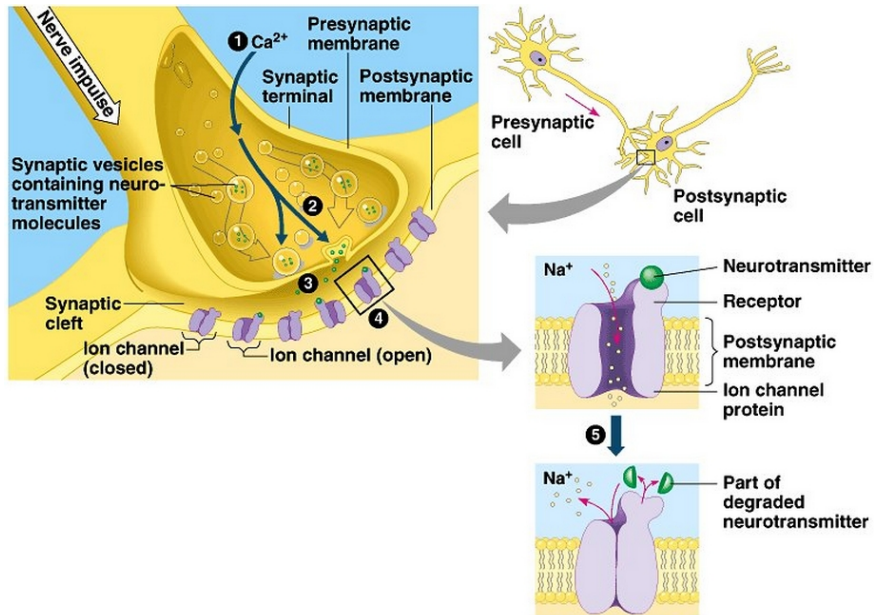
Copyright © Pearson Education, Inc., publishing as Benjamin Cummings.



# Šíření akčního potenciálu axonem



# Synaptický přenos



# Sumace

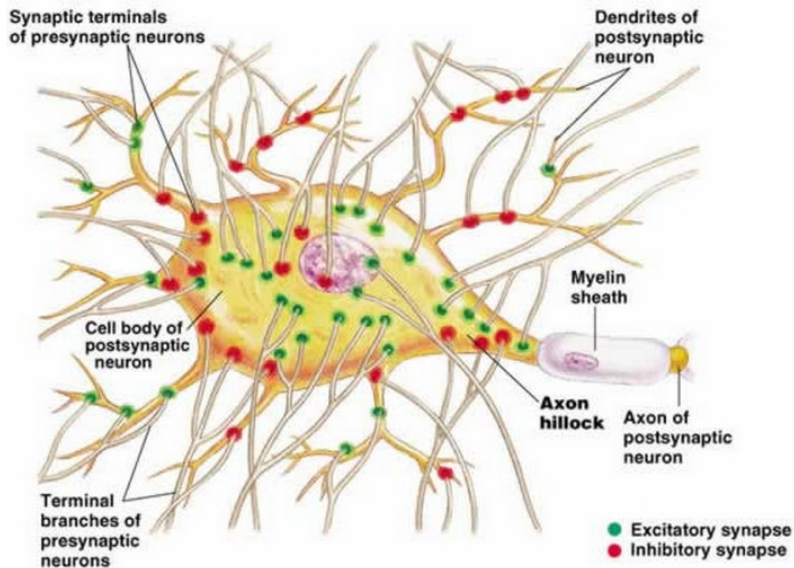
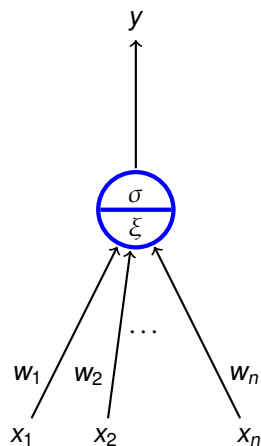


Figure 48.11(a), page 972, Campbell's *Biology*, 5th Edition

# Formální neuron bez biasu

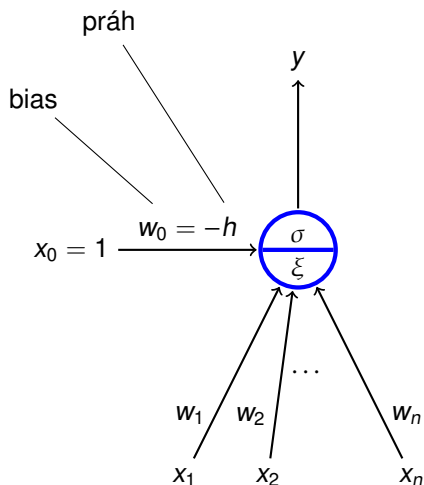


- ▶  $x_1, \dots, x_n$  jsou reálné **vstupy** („dendrity“)
- ▶  $w_1, \dots, w_n$  jsou reálné **váhy** („propustnost synapsí“)
- ▶  $\xi$  je **vnitřní potenciál**; většinou  $\xi = \sum_{i=1}^n w_i x_i$
- ▶  $y$  je **výstup** daný  $y = \sigma(\xi)$  kde  $\sigma$  je **aktivační funkce**;  
např. *ostrá nelinearita*

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq h; \\ 0 & \xi < h. \end{cases}$$

kde  $h$  je reálný *práh*.

# Formální neuron (s biasem)

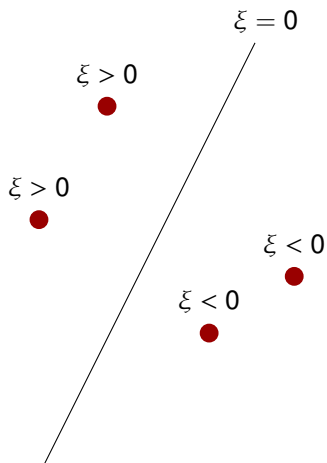


- ▶  $x_1, \dots, x_n$  jsou reálné **vstupy**
- ▶  $x_0$  je speciální vstup, který má vždy hodnotu 1
- ▶  $w_0, w_1, \dots, w_n$  jsou reálné **váhy**
- ▶  $\xi$  je **vnitřní potenciál**;  
většinou  $\xi = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$
- ▶  $y$  je **výstup** daný  $y = \sigma(\xi)$   
kde  $\sigma$  je **aktivační funkce**; např.  
*ostrá nelinearita*

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0; \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

(práh aktivační funkce  $\sigma$  je roven 0;  
reálný práh byl nahrazen vstupem  
 $x_0 = 1$  a váhou  $w_0 = -h$ )

# Neuron a lineární separace



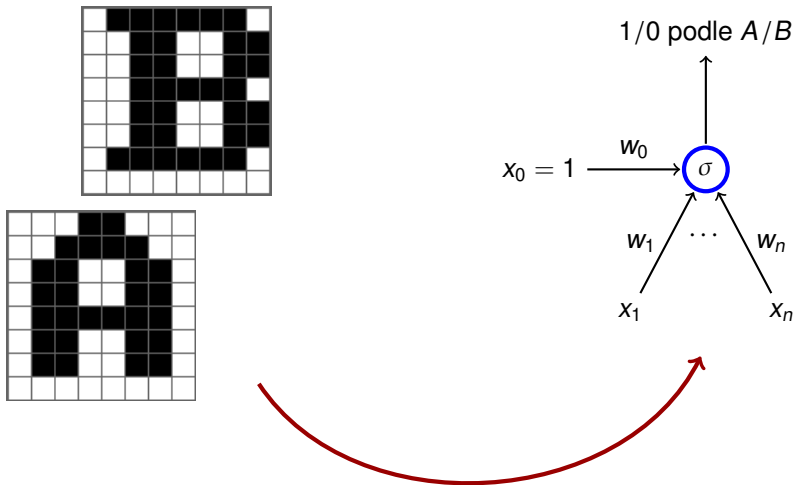
- ▶ vnitřní potenciál

$$\xi = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i x_i$$

zadává separační nadrovinu v  $n$ -rozměrném **vstupním prostoru**

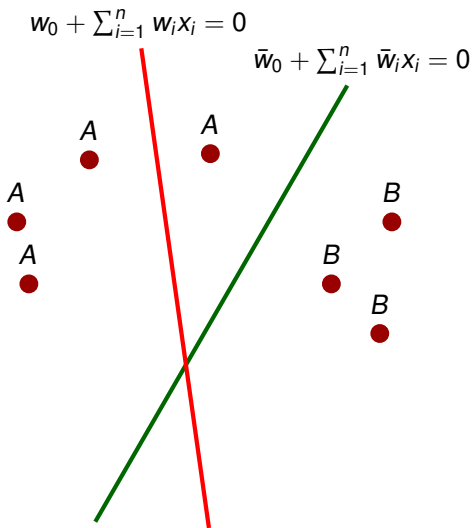
- ▶ v 2d přímka
- ▶ v 3d plocha
- ▶ ...

# Neuron a lineární separace



Zde  $n = 8 \cdot 8$  tedy počet pixelů v obrázcích. Vstupy jsou binární vektory dimenze  $n$  (tmavý bod  $\approx 1$ , světlý bod  $\approx 0$ ).

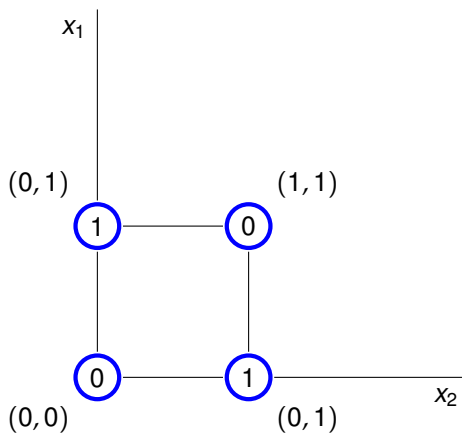
# Neuron a lineární separace



- ▶ Červená přímka nesprávně klasifikuje
- ▶ Zelená klasifikuje správně (může být výsledkem korekce učícího algoritmu)



# Neuron a lineární separace

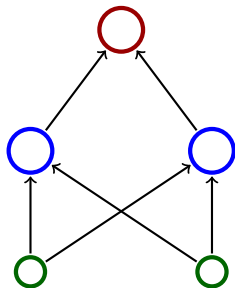


- ▶ Neexistuje přímka, která by oddělila body 1 od bodů 0.

- ▶ **Neuronová síť** se skládá z formálních neuronů, které jsou vzájemně propojeny tak, že výstup jednoho neuronu je vstupem obecně více neuronů.
- ▶ **Architektura sítě** je určena počtem a vzájemným propojením neuronů.
- ▶ **Stav** sítě je vektor hodnot všech neuronů.  
(Stavy sítě s  $n$  neurony jsou prvky  $\mathbb{R}^n$ )
- ▶ **Stavový prostor** sítě je množina všech stavů.
- ▶ **Konfigurace** sítě je vektor hodnot všech vah v síti.  
(Konfigurace sítě s  $m$  spoji jsou prvky  $\mathbb{R}^m$ )
- ▶ **Váhový prostor** sítě je množina všech konfigurací.

Neurony rozdělujeme na

- ▶ Výstupní
- ▶ Skryté
- ▶ Vstupní



## Dynamiku sítě dělíme do tří režimů

### ▶ Organizační

- ▶ architektura sítě a její případná změna

### ▶ Aktivní

- ▶ počáteční stav sítě (hodnoty neuronů) a jeho změny v čase (při pevné architektuře a konfiguraci)  
(mimo jiné určuje způsob výpočtu vnitřních potenciálů  $\xi$  a aktivační funkce  $\sigma$  všech neuronů)

### ▶ Adaptivní

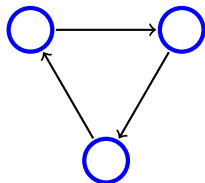
- ▶ počáteční konfigurace sítě (hodnoty vah) a její změna v čase (učení)

# Organizační dynamika

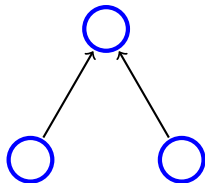
Organizační dynamika určuje strukturu sítě.

Rozlišujeme dva typy architektury:

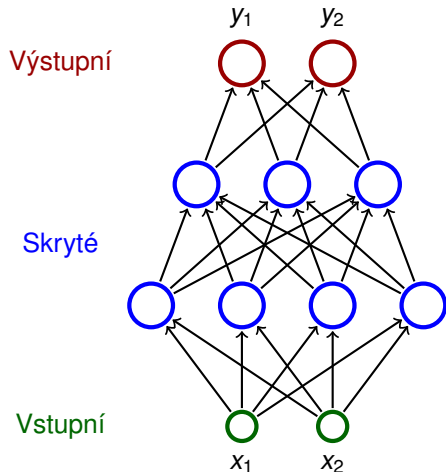
- ▶ Cyklická (resp. rekurentní), pokud obsahuje orientovaný cyklus.



- ▶ Acyklická (resp. dopředná)



# Organizační dynamika - vícevrstvé sítě



- ▶ Neurony jsou rozděleny do **vrstev** (vstupní a výstupní vrstva, obecně několik skrytých vrstev)
- ▶ Vrstvy číslujeme od 0; vstupní vrstva je nultá
  - ▶ Např. třívrstvá síť se skládá z jedné vstupní, dvou skrytých a jedné výstupní vrstvy.
- ▶ Neurony v  $i$ -té vrstvě jsou spojeny se všemi neurony ve vrstvě  $i + 1$ .
- ▶ Vícevrstvou síť lze zadat počty neuronů v jednotlivých vrstvách (např. 2-4-3-2)

Aktivní dynamika určuje, jakým způsobem síť počítá.

Mějme síť s  $n$  neurony z nichž  $k$  je vstupních a  $\ell$  výstupních.

- ▶ **Vstup sítě** je vektor  $k$  reálných čísel, tedy prvek  $\mathbb{R}^k$ .  
(někdy se omezíme pouze na jistou podmnožinu  $\mathbb{R}^k$ )
- ▶ **Vstupní prostor** sítě je množina všech vstupů.
- ▶ **Počáteční stav**  
Vstupní neurony jsou nastaveny na hodnoty ze vstupu sítě  
(každá složka vstupu má přiřazen příslušný vstupní neuron)  
Ostatní neurony jsou iniciálně nastaveny na 0.

# Aktivní dynamika - výpočet

- ▶ **Výpočet** (obvykle) probíhá v diskrétních krocích. V každém kroku se provede následující:
  1. Podle **pravidla aktivní dynamiky** je vybrán jeden neuron (sekvenční výpočet) nebo více neuronů (paralelní výpočet).
  2. Vybraný neuron změní svůj stav v závislosti na hodnotách svých vstupů.  
(Hodnota neuronu, který nemá vstupy, zůstává konstantní.)

Výpočet je **konečný** pokud se od jistého kroku dál nemění stav sítě.

- ▶ **Výstup sítě** je vektor hodnot všech výstupních neuronů (tedy prvek  $\mathbb{R}^{\ell}$ ). Výstup se mění v průběhu výpočtu!

Pro *vícevrstvé* sítě používáme následující pravidlo aktivní dynamiky:

V *i*-tém kroku vyhodnot' právě všechny neurony v *i*-té vrstvě.



## Definice

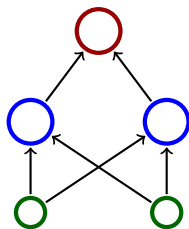
Mějme neuronovou síť s  $n$  neurony z nichž  $k$  je vstupních a  $\ell$  výstupních. Nechť  $A \subseteq \mathbb{R}^k$  a  $B \subseteq \mathbb{R}^\ell$ . Předpokládejme, že výpočet této sítě skončí pro každý vstup z  $A$ .

Řekneme, že tato síť **počítá funkci**  $F : A \rightarrow B$  pokud pro každý vstup  $\vec{v} \in A$  je  $F(\vec{v})$  výstupem sítě po skončení výpočtu.

Podle toho, zda je funkce sítě diskrétní nebo spojitá rozlišujeme **diskrétní** a **analogové** neuronové sítě.

## Příklad 1

Tato síť počítá funkci z  $\mathbb{R}^2$  do  $\mathbb{R}$ .



# Aktivní dynamika - aktivační funkce

Aktivní dynamika určuje aktivační funkci  $\sigma$  pro každý neuron.

- ▶ Ostrá nelinearita

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0; \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

- ▶ Logistická sigmoida

$$\sigma(\xi) = \frac{1}{1 + e^{-\lambda \cdot \xi}} \quad \text{kde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ je parametr } \textit{strmosti}.$$

- ▶ Hyperbolický tangens

$$\sigma(\xi) = \frac{1 - e^{-\xi}}{1 + e^{-\xi}}$$

# Aktivní dynamika - vnitřní potenciál

Aktivní dynamika určuje způsob výpočtu vnitřního potenciálu  $\xi$  každého neuronu.

Pokud nebude uvedeno jinak, předpokládáme, že

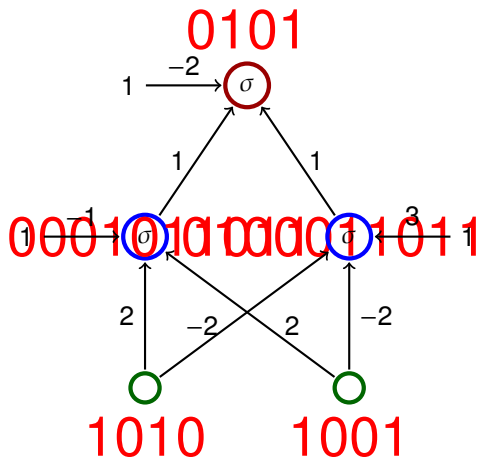
$$\xi = w_0 + \sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i$$

Později využijeme další možnosti, např.

$$\xi = \|\vec{x} - \vec{w}\|$$

kde  $\|\cdot\|$  je daná vektorová norma (nejčastěji Euklidovská),  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  jsou vstupy neuronu a  $\vec{w} = (w_1, \dots, w_n)$  jsou váhy.

# Aktivní dynamika - XOR



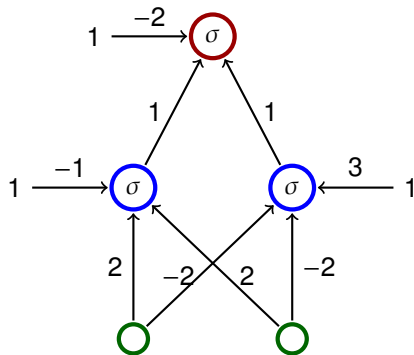
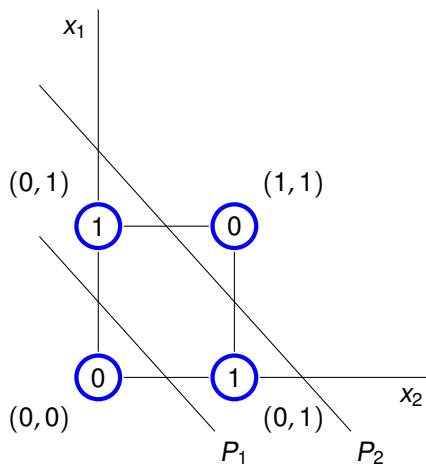
- ▶ Aktivační funkce je ostrá nelinearita

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0; \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

- ▶ Síť počítá funkci  $XOR(x_1, x_2)$

$x_1$	$x_2$	$y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

# Neuron a lineární separace



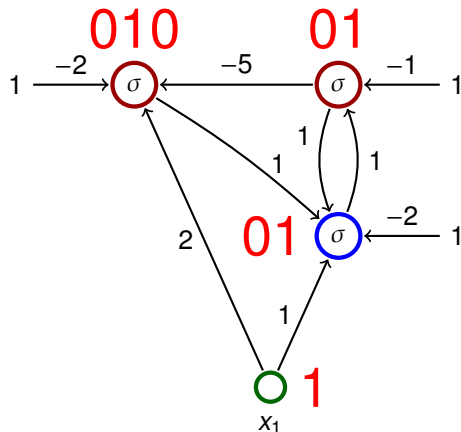
- ▶ Přímka  $P_1$  má rovnici  $-1 + 2x_1 + 2x_2 = 0$
- ▶ Přímka  $P_2$  má rovnici  $3 - 2x_1 - 2x_2 = 0$

# Aktivní dynamika - příklad

Aktivační funkce ostrá  
nelinearita

$$\sigma(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \geq 0; \\ 0 & \xi < 0. \end{cases}$$

vstup je roven 1



Adaptivní dynamika určuje, jakým způsobem se síť učí.

- ▶ **počáteční konfigurace**

váhy mohou být nastaveny buď náhodně nebo na základě předběžné znalosti vstupů sítě

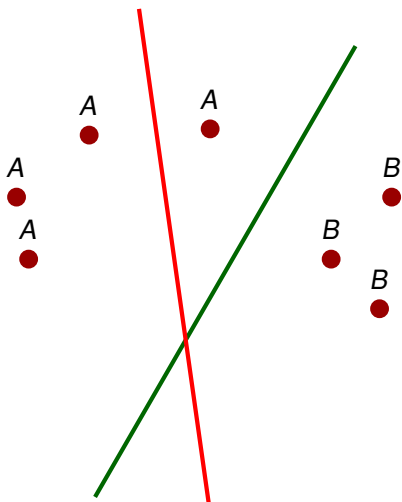
- ▶ **učící pravidlo** pro (postupnou) adaptaci vah

cílem je adaptovat váhy tak, aby síť počítala danou funkci

- ▶ učení s učitelem
  - ▶ Požadovaná funkce je zadána množinou *tréninkových vzorů* což jsou dvojice tvaru (vstup, výstup).
  - ▶ Při učení se hledá konfigurace sítě, která nejlépe odpovídá daným vzorům (vzhledem k danému kvalitativnímu kritériu).
- ▶ učení bez učitele
  - ▶ Tréninková množina obsahuje pouze vstupy sítě.
  - ▶ Cílem je odhalit strukturu v množině vstupů (shlukování, samoorganizace)

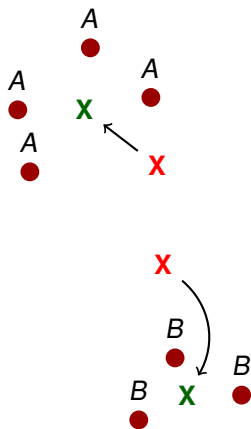


# Učení s učitelem - ilustrace



- ▶ klasifikace v rovině pomocí jednoho neuronu
- ▶ tréninkové vzory jsou tvaru (bod, hodnota) kde hodnota je buď 1 nebo 0 podle toho zda je bod ze skupiny A nebo B
- ▶ po předložení nesprávně klasifikovaného vzoru skupiny A (červená přímka), učící algoritmus pootočí přímku ve směru nesprávně klasifikovaného bodu (zelená přímka).

# Učení bez učitele - ilustrace



- ▶ hledáme dva reprezentanty „shluků“
- ▶ červené křížky odpovídají reprezentantům před aplikací učícího algoritmu, zelené po aplikaci
- ▶ učící algoritmus může např. napočítat množinu bodů, které jsou nejbližší danému reprezentantovi a potom reprezentanta posunout do těžiště této množiny bodů

# Výhody umělých neuronových sítí

- ▶ Masivní paralelismus
  - ▶ neurony mohou být vyhodnocovány současně
- ▶ Adaptace a učení
  - ▶ existuje mnoho učících algoritmů, které „programují“ neuronové sítě na základě příkladů požadovaného chování
- ▶ Schopnost generalizace a odolnost vůči nepřesnosti vstupu
  - ▶ informace jsou v síti kódovány *přibližně* pomocí vah mnoha neuronů
  - ▶ na vstup podobný vstupu tréninkového vzoru, reaguje naučená síť podobným výstupem
  - ▶ takto je schopna extrahovat charakteristické vlastnosti dat
- ▶ Odolnost vůči poškození
  - ▶ poškození se obvykle projevuje postupnou ztrátou přesnosti výsledků