1 Základní formalismy matematiky

Motivace: *Studium informatiky neznamená jen „naučit se nějaký programovací jazyk", nýbrž zahrnuje celý soubor dalších relevantních předmětů, mezi nimiž najdeme i matematicko–teoretické (formální) základy moderní informatiky.* □

Náplní první lekce našeho předmětu pak právě je studenty do potřebných matematických formalismů uvést a dát jim tak první ochutnávku „matematiky vysokoškolské úrovně". Tato matematika je (možná na rozdíl od vaší dosavadní středoškolské zkušenosti) založena na přesném formálním vyjadřování, chápání a odvozování a na rigorózním úsudku podloženém poctivou matematickou logikou. □

Stručný přehled lekce

* Pochopení přirozeného i formálního zápisu a významu matematických tvrzení (vět) a jejich důkazů.
* Rozbor logické struktury matematických vět, potřebné úrovně formality a diskuse konstruktivnosti důkazů.
* Pojem výroku a základy výrokové logiky. Velmi jemný úvod do celé matematické logiky.

1.1 Úvod do matematického dokazování

Matematika (a tudíž i teoretická informatika jako její součást) se vyznačuje velmi přísnými formálními požadavky na korektnost argumentace. □

- Uvažme matematickou *větu* (neboli tvrzení) tvaru

  „Jestliže platí předpoklady, pak platí závěr“. □

- **Důkaz** této věty je konečná posloupnost tvrzení, kde
  - ∗ každé tvrzení je buď
    - – *předpoklad*, nebo
    - – obecně přijatá „pravda“ – *axiom*, nebo
    - – plyne z předchozích a dříve dokázaných tvrzení podle nějakého „akceptovaného“ logického principu – *odvozovacího pravidla*;
  - ∗ poslední tvrzení je *závěr*. □

O potřebné úrovni formality matematických důkazů a o běžných důkazových technikách se dozvíme dále v této a příští lekci...

Pro úplný začátek si jen celou problematiku uvedeme názornými ukázkami.

Příklad 1.2. *Uvažujme následující matematické tvrzení (které jistě už znáte).*

Věta. *Jestliže x je součtem dvou lichých čísel, pak x je sudé.*

Poznámka pro připomenutí:

– *Sudé* číslo je celé číslo dělitelné 2, tj. tvaru $2k$.

– *Liché* číslo je celé číslo nedělitelné 2, tj. tvaru $2k + 1$. □

Důkaz postupuje v následujících formálních krocích:

	tvrzení	zdůvodnění
1)	$a = 2k + 1$, k celé	předpoklad
2)	$b = 2l + 1$, l celé	předpoklad
3)	$x = a + b = 2k + 2l + 1 + 1$	z 1,2) a komutativity sčítání (axiom)
4)	$x = 2(k + l) + 2 \cdot 1$	ze 3) a distributivnosti násobení (axiom)
5)	$x = 2(k + l + 1)$	ze 4) a opět distributivnosti násobení
6)	$x = 2m$, m celé	z 5) a $m = k + l + 1$ je celé číslo (axiom)

□

Příklad 1.3. *Dokažte následující tvrzení:*

> **Věta**. *Jestliže x a y jsou racionální čísla pro která platí $x < y$, pak existuje racionální číslo z pro které platí $x < z < y$.* □

Důkaz po krocích (s již trochu méně formálním zápisem) zní:

1) Nechť $z = \frac{x+y}{2} = x + \frac{y-x}{2} = y - \frac{y-x}{2}$. □
2) Číslo z je racionální, neboť x a y jsou racionální.
3) Platí $z > x$, neboť $\frac{y-x}{2} > 0$.
4) Dále platí $z < y$, neboť opět $\frac{y-x}{2} > 0$.
5) Celkem $x < z < y$. □

Všimněte si, že klíčový krok (1) popisuje námi vymyšlenou (prostě uhodnutou) algebraickou konstrukci, která vede k požadovanému číslu z. Zbylé kroky (2–5) pak jen snadno zdůvodňují, že nalezené z má všechny požadované vlastnosti. □

1.2 Význam matematických tvrzení

- První krok formálního důkazu je uvědomit si, co tvrdí věta, která se má dokázat; tedy co je *předpoklad* a co *závěr* dokazovaného tvrzení.
  Pravdivost takového tvrzení pak je třeba chápat v následujícím významu:

  Pro každou situaci, ve které jsou splněny všechny předpoklady, je platný i závěr tvrzení. □ (*)

- Příklady běžné formulace *matematických vět*:
  * Konečná množina má konečně mnoho podmnožin. □
  * $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$. □
  * Graf je rovinný, jestliže neobsahuje podrozdělení K_5 nebo $K_{3,3}$. □

- Co přesně nám uvedené matematické věty říkají?
  Často pomůže pouhé rozepsání definic pojmů, které se v dané větě vyskytují. □

- Především je třeba správně pochopit, jaký je logický význam matematického tvrzení vysloveného typicky formou *implikace* („jestliže ..., pak ...“).
  Z předchozího (*) totiž vyplývá, že pokud předpoklady nejsou splněny nebo jsou sporné, tak celé tvrzení je platné bez ohledu na pravdivost závěru!

O pravdivosti implikace

Příklad 1.4. *Je pravdivé následující matematické tvrzení?*

> **Věta**. *Mějme dvě kuličky, červenou a modrou. Jestliže červená kulička je těžší než modrá a zároveň je modrá kulička těžší než ta červená, tak jsou obě kuličky ve skutečnosti zelené.* □
>
> *„To přece nemůže být pravda, jak může být jedna kulička těžší než druhá a naopak zároveň? Jak mohou být nakonec obě zelené? To je celé nějaká blbost. . . “* □

Ano, výše uvedené jsou typické laické reakce na uvedenou větu. Přesto však tato věta pravdivá je!
Stačí se vrátit o kousek výše ke kritériu – Pro každou situaci, ve které jsou splněny všechny předpoklady, je platný i závěr tvrzení – které je zjevně naplněno. Nenaleznete totiž situaci, ve které by byly splněny oba předpoklady zároveň, a tudíž ve všech takových neexistujících situacích si můžete říkat cokoliv, třeba že kuličky jsou zelené. □

Příklad 1.5. *Anna a Klára přišly na přednášku a usadily se do lavic. Proč je pravdivé toto matematické tvrzení?*

> **Věta**. *Jestliže Anna sedí v první řadě lavic a zároveň Anna sedí v poslední řadě lavic, tak Klára nesedí ve druhé řadě lavic.* □

Opět je třeba se hluboce zamyslet nad významem předpokladů a závěru, ale tentokrát není situace předpokladů tak triviálně sporná, jako v Příkladu 1.4. Kdy tedy nastávají oba předpoklady zároveň? □

Když první řada lavic je zároveň řadou poslední. □

Neboli posluchárna má jen (nejvýše) jednu řadu lavic a Klára tudíž v druhé řadě nemůže sedět. Důkaz je hotov. □

1.3 Tvoření matematických důkazů

Jak „moc formální" mají správné matematické důkazy vlastně být?

- Záleží, komu je důkaz určen — konzument musí být schopen „snadno" ověřit korektnost každého tvrzení v důkazu a plně pochopit, z čeho vyplývá.
- Je tedy hlavně na vás zvolit tu správnou úroveň formálnosti zápisu vět i důkazů podle situace.
- Avšak vůbec neplatí, že čím více formálních matematických symbolů v důkaze použijete místo běžného jazyka, tím by byl důkaz přesnější!

A jak na ten správný matematický důkaz máme přijít?

- No. . . , nalézání matematických důkazů je tvůrčí činnost, která není vůbec snadná a jako taková vyžaduje tvůrčí (přímo „*umělecké*") matematické vlohy. Přesto se jí alespoň trochu musíte přiučit.

Dokazovat či vyvracet tvrzení?

Představme si, že naším úkolem je rozhodnout platnost matematického tvrzení. Jak pak matematicky správně zdůvodníme nalezenou odpověď?

- Záleží na odpovědi samotné. . . □
- Pokud je to ANO (platí), prostě podáme důkaz podle uvedených zvyklostí.
- Pokud je odpověď NE, tak naopak podáme důkaz *negace* daného tvrzení. □

Poměrně častým případem je matematická věta T, která tvrdí nějaký závěr pro širokou oblast vstupních možností. Potom je postup následující: □

- Pokud T platí, nezbývá než podat vyčerpávající důkaz platnosti pro všechny vstupy. □
- Avšak pokud T je nepravdivá, stačí uhodnout vhodný vstupní *protipříklad* a jen pro něj dokázat, že závěr tvrzení není platný.

Příklad 1.6. *Rozhodněte platnost následujícího tvrzení: Pro všechna reálná x platí*

$$x^2 + 3x + 2 \geq 0\,.$$

Důkaz: Standardními algebraickými postupy si můžeme upravit vztah na $x^2 + 3x + 2 = (x + 1) \cdot (x + 2) \geq 0$. Co nám z něj vyplývá? Například to, že k porušení daného tvrzení stačí volit x tak, aby jedna ze závorek byla kladná a druhá záporná. To nastane třeba pro $x = -\frac{3}{2}$.

Pro vyvrácení tvrzení nám tedy stačí začít volbou protipříkladu $x = -\frac{3}{2}$ (není nutno zdůvodňovat, jak jsme jej „uhodli“!) a následně dokázat úpravou

$$x^2+3x+2 = (x+1)\cdot(x+2) = (-\frac{3}{2}+1)\cdot(-\frac{3}{2}+2) = (-\frac{1}{2})\cdot(+\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} < 0\,.$$

Dané tvrzení tudíž není platné. □

Konstruktivní a existenční důkazy

Z hlediska praktické využitelnosti je vhodné rozlišovat tyto dvě kategorie důkazů (třebaže z formálně–matematického pohledu mezi nimi kvalitativní rozdíl není).

- Důkaz z Příkladu 1.3 je *konstruktivní*. Dokázali jsme nejen, že číslo z existuje, ale podali jsme také návod, jak ho pro dané x a y sestrojit.
- *Existenční* důkaz je takový, kde se prokáže existence nějakého objektu bez toho, aby byl podán použitelný návod na jeho konstrukci. □

Příklad 1.7. *Čistě existenčního důkazu.*

> **Věta**. *Existuje program, který vypíše na obrazovku čísla tažená ve 45. tahu sportky v roce 2016.*□

Důkaz: Existuje pouze konečně mnoho možných výsledků losování 45. tahu sportky v roce 2016. Pro každý možný výsledek existuje program, který tento daný výsledek vypíše na obrazovku. Mezi těmito programy je tedy jistě ten, který vypíše právě ten výsledek, který bude ve 45. tahu sportky v roce 2016 skutečně vylosován. □ □

To je ale „podvod“, že? □A přece není. . . Formálně správně to je prostě tak a tečka.

1.4 Výroky a základ logiky

* Důležitým „pevným mostem“ mezi běžnou mluvou a přesným matematickým formalismem je následující pojem výroku.

Definice 1.9. **Výrok** v přirozené mluvě:
V běžné mluvě za *výrok* považujeme (každé) tvrzení, o kterém má smysl platně prohlásit, že je buď pravdivé nebo nepravdivé. □

Ukážeme si několik příkladů – které z nich jsou výroky?

- Dnes už v Brně pršelo. □
- Předmět FI: IB000 se vyučuje v prvním ročníku. □
- Platí $2 + 3 = 6$. □
- To je bez problémů. (Co?) □
- Platí $x > 3$. □
- Pro každé celé číslo x platí, že $x > 3$. □

Všimněte si, že pravdivost výroku by mělo být možné rozhodnout bez skrytých souvislostí (kontextu), a proto čtvrtý a pátý příklad za výroky nepovažujeme.

* Z více jednoduchých výroků vytváříme výroky složitější pomocí tzv. *logických spojek*.

Následuje několik dalších příkladů.

- Množina $\{a, b\}$ má více než jeden prvek a není nekonečná.□
- Jestliže Karel váží přes 90 kg, nejedu s ním výtahem.□
- Jestliže má tato kráva 10 nohou, pak mají všechny domy modrou střechu.

Zastavme se na chvíli nad posledním výrokem. Co nám říká? Je pravdivý? □Skutečně mají všechny domy modrou střechu a před námi stojí kráva s 10 nohama? □

Přirozené vs. formální

* Schopnost porozumět podobným větám je součást lidského způsobu uvažování a z tohoto hlediska nemá přímou souvislost s matematikou (je to „přirozená logika“).□
* *Formální (matematická) logika* pak v podobném duchu definuje jazyk matematiky a přitom odstraňuje nejednoznačnosti přirozeného jazyka.

1.5 Střípky matematické logiky

Všimněte si, že podle Definice 1.9 každému výroku běžné mluvy lze přiřadit logickou hodnotu 0 ($false$) nebo 1 ($true$) a dále se nestarat o jazykový význam...

Proto jazykové výroky v matematice můžeme nahradit *výrokovými proměnnými*, které značíme velkými písmeny $A, B, C, \dots$ a přiřadíme jim hodnotu 0 nebo 1. □

Definice: *Výroková formule* (značíme $\varphi, \sigma, \psi, \dots$) vzniká z výrokových proměnných pomocí závorek a logických spojek $\neg$ *negace* a $\Rightarrow$ *implikace*. □

Zároveň používáme v zápise následujících zkratek

* $\varphi \vee \psi$ (*disjunkce* / „nebo“) je jiný zápis formule $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, □
* $\varphi \wedge \psi$ (*konjunkce* / „a“) je jiný zápis formule $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$, □
* $\varphi \Leftrightarrow \psi$ (*ekvivalence*) je jiný zápis formule $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$. □

Při zápise výrokových formulí je potřeba dávat pozor na správné závorkování, aby formule měla jednoznačný význam. Na intuitivní úrovni to ilustrujeme takto:

Správně A, $(A) \Rightarrow (B)$, $A \Rightarrow B$, $\neg A \Rightarrow B$, $A \vee B \vee \neg C$

a nesprávně $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ — znamená to $(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$ nebo $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$?

Definice 1.11. **Sémantika** (význam) výrokové logiky.
Nechť *valuace* (ohodnocení) je funkce $\nu : Prom \to \{0,1\}$ na všech (dotčených) výrokových proměnných. Pro každou valuaci ν definujeme funkci $\mathcal{S}_\nu(\sigma)$, *vyhodnocení* formule σ, induktivně (tj. po krocích) takto:

- $\mathcal{S}_\nu(A) = \nu(A)$ pro každé $A \in Prom$.
- $\mathcal{S}_\nu(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Rightarrow \psi) = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } \mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1 \text{ a } \mathcal{S}_\nu(\psi) = 0; \\ 1 & \text{jinak.} \end{cases}$

Tvrzení 1.12. *Přímým důsledkem Definice 1.11 a zkratek '$\vee$' za $\neg\varphi \Rightarrow \psi$, '$\wedge$' za $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ a '$\Leftrightarrow$' za $(\varphi \Rightarrow \psi) \wedge (\psi \Rightarrow \varphi)$, je následovné:*

- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \vee \psi) = 1$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ nebo $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \wedge \psi) = 1$ právě když $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$.
- $\mathcal{S}_\nu(\varphi \Leftrightarrow \psi) = 1$ právě když platí jedna z následujících podmínek
  * $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 1$,
  * $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 0$ a současně $\mathcal{S}_\nu(\psi) = 0$.

Pravdivostní tabulky

V praxi často vyhodnocení $\mathcal{S}_\nu$ logické výrokové formule zapisujeme do tzv. *pravdivostní tabulky*. Tato tabulka typicky má sloupce pro jednotlivé proměnné, případné „meziformule“ (pomůcka pro snazší vyplnění) a výslednou formuli. Řádků je 2^p (počet valuací), kde p je počet použitých proměnných. □

Příklad 1.13. *Jaká je pravdivostní tabulka pro formuli* $(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$*?*

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$(A \Rightarrow B) \vee B \vee C$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

□

Splnitelnost formulí a tautologie

Definice: Formule φ je *splnitelná*, pokud pro některou valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$. Formule je nesplnitelná (říká se *kontradikce*), pokud není splnitelná. $\square$

Formule φ je vždy pravdivá, neboli výroková *tautologie*, psáno $\models \varphi$, pokud pro každou valuaci ν platí, že $\mathcal{S}_\nu(\varphi) = 1$. $\square$

Řekneme, že dvě formule φ, ψ jsou *ekvivalentní*, právě když $\models \varphi \Leftrightarrow \psi$. $\square$

Tvrzení 1.14. *Následující formule jsou tautologiemi:*

- $\models A \vee \neg A$ $\square$
- $\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$ $\square$
- $\models (A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ $\square$
- $\models (\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $\square$
- $\models (\neg A \Rightarrow (B \wedge \neg B)) \Rightarrow A$

Jak poznáme tautologii v pravdivostní tabulce?

Kvantifikace a predikátová logika

Výše popsaná výroková logika je velmi omezená faktem, že každý výrok musí být (tzv. absolutně) vyhodnocen jako pravda nebo nepravda.

- Predikátová logika pracuje s *predikáty*. Predikáty jsou „parametrizované výroky“, které jsou buď pravdivé nebo nepravdivé pro každou konkrétní volbu parametrů. □Výrok. prom. lze chápat jako predikáty bez parametrů.□

Pro neformální přiblížení si uvedeme několik ukázek predikátů:

- $x > 3$ (parametrem je zde $x \in \mathbb{R}$),□
- čísla x a y jsou nesoudělná (parametry $x, y \in \mathbb{N}$),
- obecně jsou predikáty psány $P(x, y)$, kde x, y jsou libovolné parametry.□

Definice: Z predikátů lze vytvářet *predikátové formule* pomocí už známých výrokových spojek a následujících tzv. *kvantifikátorů*:

- $\forall x \,.\, \varphi$ „pro každou volbu parametru x platí formule φ“ nebo jinak řečeno „pro všechna / kterékoliv x platí formule φ“,□
- $\exists x \,.\, \varphi$ „existuje alespoň jedna volba parametru x, pro kterou platí φ“ nebo jinak řečeno „pro nějaké x platí formule φ“.

Fakt: Je-li každá proměnná – parametr predikátu – v dané formuli kvantifikovaná (tj. formule je *uzavřená*), pak je formule buď pravdivá nebo nepravdivá.

Příklad 1.15. *Ukažme si vyjádření násl. slovních výroků v predikátové logice:*

- Každé prvočíslo větší než 2 je liché;

  $$\forall n \in \mathbb{N}\,.\ \big[(Pr(n) \wedge n>2) \ \Rightarrow\ Li(n)\big],$$

  přičemž lze rozepsat $Li(n) \equiv \exists k \in \mathbb{N}\,.\ n = 2k+1.$

- Každé celé číslo $n > 1$, které není prvočíslem, je dělitelné nějakým celým číslem y kde $n \neq y$ a $y > 1$;

  $$\forall n \in \mathbb{Z}\,.\ \big(n > 1 \wedge \neg Pr(n)\big) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{Z}\big(y|\,n \wedge n{\neq}y \wedge y{>}1\big).$$

  □

Příklad 1.16. *Proč na pořadí kvantifikátorů velmi záleží:*

- Pro každého studenta A v posluchárně platí, že existuje student B v posluchárně takový, že A je kamarád B.
- Existuje student B v posluchárně, že pro každého studenta A v posluchárně platí, že A je kamarád B. □

Normální tvar formulí s negací

Přesný význam tvrzení se zanořenými negacemi je někdy skutečně obtížné pochopit.□

„Není pravda, že nemohu neříct, že není pravda, že tě nemám nerad.“ □

Výrokové formule se proto obvykle prezentují v tzv. normálním tvaru, ve kterém se negace zanořených podformulí nevyskytují, formálně:□

Definice: Formule φ je v *normálním tvaru*, pokud se v ní operátor negace aplikuje pouze na výrokové proměnné (případně na predikáty).

- Pro ilustraci, k formuli $\neg(A \Rightarrow B)$ je ekvivalentní $A \wedge \neg B$, □
- k formuli $\neg\big(C \wedge (\neg A \Rightarrow B)\big)$ je ekvivalentní $\neg C \vee (\neg A \wedge \neg B)$. □

Tvrzení 1.18. *Každou výrokovou formuli lze převést do normálního tvaru, pokud k* $\Rightarrow$ *povolíme i užívání odvozených spojek* $\wedge$ *a* $\vee$. □

Například, pokud přijmeme přirozené pravidlo dvojí negace ($\models \neg\neg A \Leftrightarrow A$), tak výše napsanou větu si převedeme na lépe srozumitelný tvar:

„Nemusím říct, že tě mám nerad.“ □

Metoda 1.19. Převod formule φ do normálního tvaru $\mathcal{F}(\varphi)$.
Používáme $\mathcal{F}(X)$ jako „je pravda, že X“ a $\mathcal{G}(X)$ jako „není pravda, že X“.

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathcal{F}(A) & = & A & \mathcal{G}(A) & = & \neg A \\
\mathcal{F}(\neg\varphi) & = & \mathcal{G}(\varphi) & \mathcal{G}(\neg\varphi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Rightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Rightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \wedge \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \vee \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \vee \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \vee \psi) & = & \mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi) \\
\mathcal{F}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & \mathcal{F}(\varphi) \Leftrightarrow \mathcal{F}(\psi) & \mathcal{G}(\varphi \Leftrightarrow \psi) & = & (\mathcal{F}(\varphi) \wedge \mathcal{G}(\psi)) \vee (\mathcal{G}(\varphi) \wedge \mathcal{F}(\psi))
\end{array}
$$

Pro predikátové formule toto rozšíříme ještě o pravidla:

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\mathcal{F}(\forall x \,.\, \varphi) & = & \forall x \,.\, \mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\forall x \,.\, \varphi) & = & \exists x \,.\, \mathcal{G}(\varphi) \\
\mathcal{F}(\exists x \,.\, \varphi) & = & \exists x \,.\, \mathcal{F}(\varphi) & \mathcal{G}(\exists x \,.\, \varphi) & = & \forall x \,.\, \mathcal{G}(\varphi)
\end{array}
$$

Uvažme formuli $\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))$. Užitím uvedeného postupu Metody 1.19 získáme:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{F}(\neg(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)))) & = & \mathcal{G}(A \Rightarrow \neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = \\
\mathcal{F}(A) \wedge \mathcal{G}(\neg(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge \mathcal{F}(B \vee \neg(C \Rightarrow \neg A)) & = \\
A \wedge (\mathcal{F}(B) \vee \mathcal{F}(\neg(C \Rightarrow \neg A))) & = & A \wedge (B \vee \mathcal{G}(C \Rightarrow \neg A)) & = \\
A \wedge (B \vee (\mathcal{F}(C) \wedge \mathcal{G}(\neg A))) & = & A \wedge (B \vee (C \wedge \mathcal{F}(A))) & = \\
A \wedge (B \vee (C \wedge A)) & & &
\end{array}
$$