7 Pojem grafu

Třebaže *grafy* jsou jen jednou z mnoha struktur v matematice a vlastně pouze speciálním případem binárních relací, vydobyly si svou užitečností a názorností (a to především ve vztahu k informatice) důležité místo na slunci.

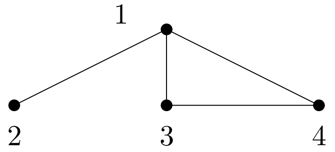
Neformálně řečeno, graf se skládá z *vrcholů* (představme si je jako nakreslené „puntíky“) a z *hran*, které spojují dvojice vrcholů mezi sebou.

Stručný přehled lekce

* Zavedení a pochopení grafů, jejich základní pojmy.
* Příklady běžných tříd grafů, podgrafy a isomorfismus, souvislost.
* Stromy a jejich speciální vlastnosti.

7.1 Definice grafu

Definice 7.1. **Graf** (jednoduchý neorient.) je uspořádaná dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná množina *vrcholů* a E je množina *hran* – množina vybraných dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů.



Značení: Hranu mezi vrcholy u a v píšeme jako $\{u, v\}$, nebo zkráceně uv. Vrcholy spojené hranou jsou *sousední* a hrana uv *vychází* z vrcholů u a v. Na množinu vrcholů grafu G odkazujeme jako na $V(G)$, na množinu hran $E(G)$.

Grafy se často zadávají přímo názorným obrázkem, jinak je lze formálně zadat výčtem vrcholů a výčtem hran. Například:

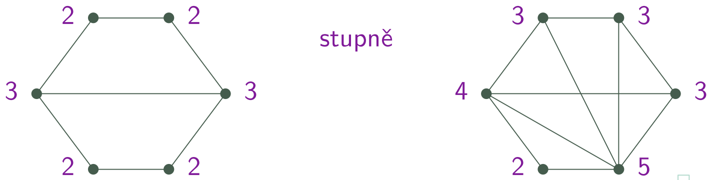
$$V = \{1, 2, 3, 4\}, \quad E = \Big\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{3, 4\}\Big\}$$

Na graf se lze dívat také jako na symetrickou ireflexivní relaci, kde hrany tvoří právě dvojice prvků z této relace.

Stupně vrcholů v grafu

Definice 7.2. **Stupněm vrcholu** v v grafu G rozumíme počet hran vycházejících z v. Stupeň v v grafu G značíme $d_G(v)$. □

Slovo „vycházející“ zde nenaznačuje žádný směr; je totiž obecnou konvencí u neorientovaných grafů říkat, že hrana vychází z obou svých konců zároveň.



□

Definice: Graf je *d-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stejný stupeň d. □

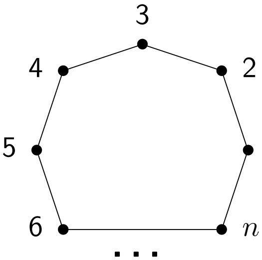
Značení: *Nejvyšší* stupeň v grafu G značíme $\Delta(G)$ a *nejnižší* $\delta(G)$. □

Věta 7.3. *Součet stupňů v grafu je vždy sudý, roven dvojnásobku počtu hran.*

Běžné typy grafů

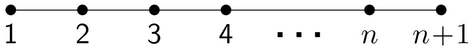
Kružnice délky n má $n \geq 3$ různých vrcholů spojených „do jednoho cyklu“ n hranami:

C_n



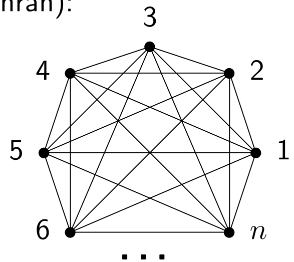
Cesta délky $n \geq 0$ má $n+1$ různých vrcholů spojených „za sebou“ n hranami:

P_n



Úplný graf na $n \geq 1$ vrcholech má n různých vrcholů spojených po všech dvojicích (tj. celkem $\binom{n}{2}$ hran):

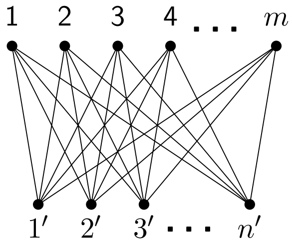
K_n



□

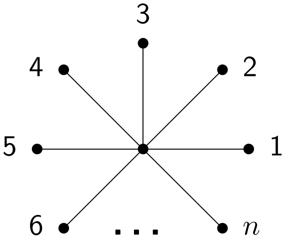
Úplný bipartitní graf na $m \geq 1$ a $n \geq 1$ vrcholech má $m + n$ vrcholů ve dvou skupinách (partitách), přičemž hranami jsou spojeny všechny $m \cdot n$ dvojice z různých skupin:

$K_{m,n}$



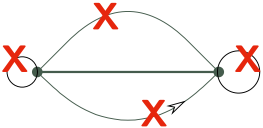
Hvězda s $n \geq 1$ rameny je zvláštní název pro úplný bipartitní graf $K_{1,n}$:

$\boldsymbol{S_n}$



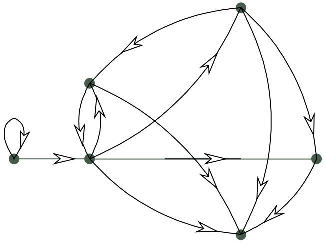
Zmínka o zobecněných grafech

Všimněme si, že v definici grafu (Def. 7.1) vůbec neuvažujeme možnosti vícenásobných hran (mezi stejnou dvojicí vrcholů) a tzv. „smyček“ (hrana se stejným jedním koncem)—takovému zobecnění by se říkalo multigraf; ani zatím nepřisuzujeme hranám žádný směr.



□

V Lekci 9 si však ještě zavedeme *orientované grafy*, které každé hraně přiřazují jistý směr. Orientované grafy budou mít množinu *orientovaných hran* $A \subseteq V(G) \times V(G)$ a zobrazíme je třeba takto...

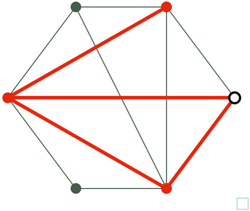


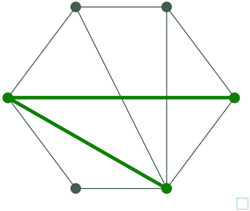
7.2 Podgrafy a Isomorfismus

Definice: *Podgrafem* grafu G rozumíme libovolný graf H na podmnožině vrcholů $V(H) \subseteq V(G)$, který má za hrany libovolnou podmnožinu hran grafu G majících oba vrcholy ve $V(H)$.

Píšeme $H \subseteq G$, tj. stejně jako množinová inkluze (ale význam je trochu jiný). □

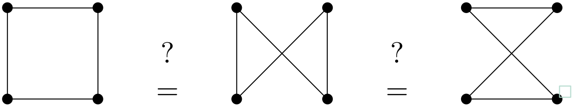
Na následujícím obrázku vidíme zvýrazněné podmnožiny vrcholů hran. Proč se vlevo nejedná o podgraf? Obrázek vpravo už podgrafem je.



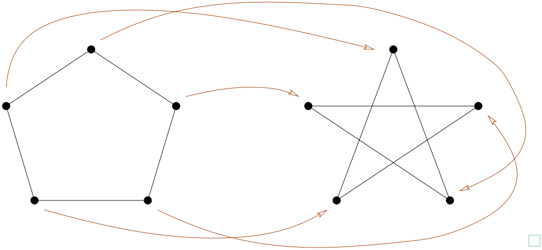


Definice: *Indukovaným podgrafem* je podgraf $H \subseteq G$ takový, který obsahuje všechny hrany grafu G mezi dvojicemi vrcholů z $V(H)$.

„Stejnost“ grafů



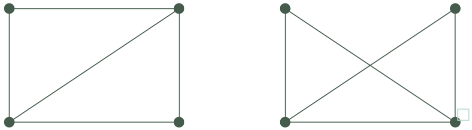
Definice 7.4. **Isomorfismus** $\simeq$ grafů G a H
je bijektivní zobrazení $f : V(G) \to V(H)$, pro které každá dvojice $u, v \in V(G)$ je spojená hranou v G právě, když je dvojice $f(u), f(v)$ spojená hranou v H.



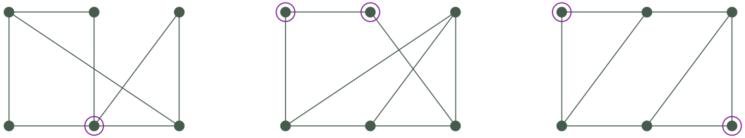
Grafy G a H jsou *isomorfní*, $G \simeq H$, pokud mezi nimi existuje isomorfismus.

Fakt: Mějme isomorfismus f grafů G a H. Pak platí následující

* G a H mají stejný počet hran,
* f zobrazuje na sebe vrcholy stejných stupňů, tj. $d_G(v) = d_H(f(v))$.



U výše zakreslených dvou grafů objevíme isomorfismus velmi snadno – podíváme se, jak si odpovídají vrcholy stejných stupňů.



Naopak v této trojici grafů (se stejnými počty vrcholů i hran) žádné dva nejsou isomorfní. Proč? Ten vlevo má vrchol stupně 4, čímž se od obou zbylých liší. Prostřední graf pak má jediné dva vrcholy stupně 2 spojené hranou, kdežto v pravém takové dva vrcholy spojené nejsou (isomorfismus by je však i s hranou musel zachovat).

Příklad 7.5. *Jsou následující dva grafy isomorfní?*

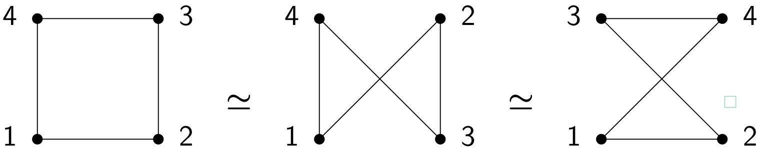
Pokud mezi nakreslenými dvěma grafy hledáme isomorfismus, nejprve se podíváme, zda mají stejný počet vrcholů a hran. □Mají. Pak se podíváme na stupně vrcholů a zjistíme, že oba mají stejnou posloupnost stupňů $2, 2, 2, 2, 3, 3$. □Takže ani takto jsme mezi nimi nerozlišili a mohou (nemusejí!) být isomorfní. Dále tedy nezbývá, než zkoušet všechny přípustné možnosti zobrazení isomorfismu z levého grafu do pravého. □

Na levém grafu si pro ulehčení všimněme, že oba vrcholy stupně tři jsou si symetrické, proto si bez újmy na obecnosti můžeme vybrat, že vrchol označený 1 se zobrazí na $1'$. Druhý vrchol stupně tři, označený 4, se musí zobrazit na analogický vrchol druhého grafu $4'$. A zbytek již plyne snadno:

□

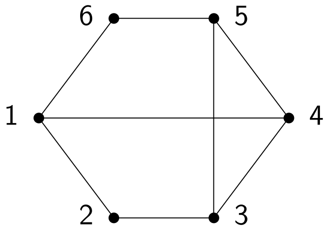
Důsledek: Stejnost grafů jako isomorfismus!

Graf G $\longleftrightarrow$ Celá *třída isomorfismu* grafu G



Je uvedený přístup, tj. zaměňování konkrétního grafu za celou jeho třídu isomorfismu, v matematice neobvyklý? Ne, například už v geometrii jste říkali „čtverec o straně 2“ či „jednotkový kruh“ a podobně, aniž jste měli na mysli konkrétní obrázek, nýbrž celou třídu všech těchto shodných objektů.

Další grafové pojmy



Definice: Mějme libovolný graf G. □

- $*$ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *kružnice v* G.
- $*$ Speciálně říkáme *trojúhelník* kružnici délky 3. □
- $*$ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké cestě, říkáme *cesta v* G. □
- $*$ Podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějakému úplnému grafu, říkáme *klika v* G.
- $*$ Podmnožině vrcholů $X \subseteq V(G)$, mezi kterými nevedou v G vůbec žádné hrany, říkáme *nezávislá množina* X *v* G. □
- $*$ Indukovanému podgrafu $H \subseteq G$, který je isomorfní nějaké kružnici, říkáme *indukovaná kružnice v* G.

7.3 Souvislost grafů, komponenty

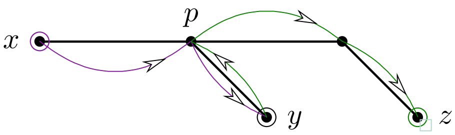
Důležitou globální vlastností grafů je souvislost, tedy možnost se v nich pohybovat odkudkoliv kamkoliv podél jeho hran, neboli po cestách v grafu. □

Tvrzení 7.6. *Mějme relaci $\sim$ na množině vrcholů $V(G)$ libovolného grafu G takovou, že pro dva vrcholy $x \sim y$ právě když existuje v G cesta začínající v x a končící v y. Pak $\sim$ je relací ekvivalence.* □

Důkaz.

- Relace $\sim$ je reflexivní, neboť každý vrchol je spojený sám se sebou cestou délky 0. □
- Symetrická je také, protože cestu z x do y snadno v neorientovaném grafu obrátíme na cestu z y do x. □
- Důkaz tranzitivity však není takto triviální—□pokud vezmeme cestu z x do y a cestu z y do z, tak se tyto dvě cesty mohou protínat i jinde než v y a nelze je prostě „navázat“ na sebe.

- Zmíněný problém vidíme například zde:



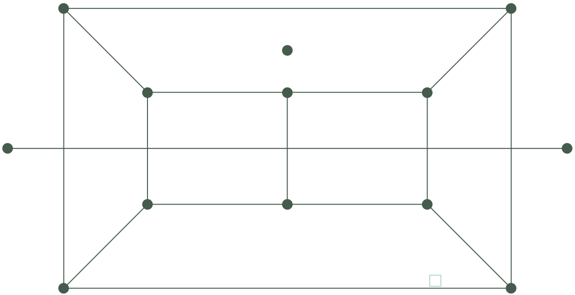
Pro důkaz tranzitivity si označme P cestu z x do y a Q cestu z y do z. Pokud označíme $P' \subseteq P$ tu část první cesty z x do prvního vrcholu p v průniku s Q (tj. $p \in V(P) \cap V(Q)$) a označíme $Q' \subseteq Q$ zbytek druhé cesty od p do z, tak $P' \cup Q'$ vždy je cestou z x do z.

$\square$

Definice 7.7. **Komponentami souvislosti** grafu G nazveme třídy ekvivalence výše popsané (Tvrz. 7.6) relace $\sim$ na $V(G)$. □

Jinak se také komponentami souvislosti myslí podgrafy indukované na těchto třídách ekvivalence. □

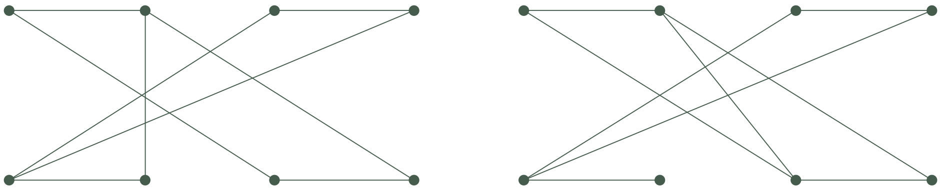
Podívejte se, kolik komponent souvislosti má tento graf:



Vidíte v obrázku všechny tři komponenty? Jedna z nich je izolovaným vrcholem, druhá hranou (tj. grafem isomorfním K_2) a třetí je to zbývající.

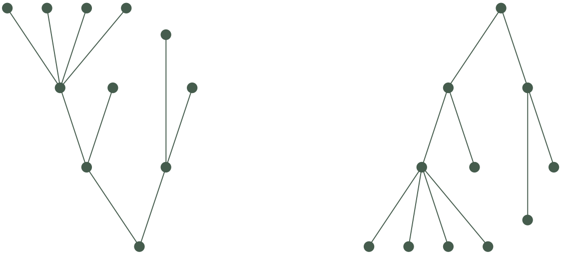
Definice 7.8. **Graf G je souvislý** pokud je G tvořený nejvýše jednou komponentou souvislosti, tj. pokud každé dva vrcholy G jsou spojené cestou. □

Který z těchto dvou grafů je souvislý?



7.4 Stromy – grafy bez kružnic

Příklady obrázků stromů následují. Zajímavostí k povšimnutí je, že v informatice stromy typicky rostou „shora dolů"...



Charakteristickými znaky stromů je absence kružnic a souvislost. □

Definice 7.9. **Strom** je (jednoduchý) souvislý graf T bez kružnic.

□

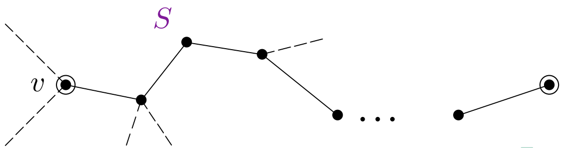
Les je graf bez kružnic (jednoduchý, nemusí být souvislý). Komponenty souvislosti lesa jsou stromy. Jeden vrchol bez hran a prázdný graf jsou také stromy. Grafy bez kružnic také obecně nazýváme *acyklické*.

Vlastnosti stromů

Tvrzení 7.10. *Strom s více než jedním vrcholem obsahuje vrchol stupně* 1.

Důkaz: Souvislý graf s více než jedním vrcholem nemůže mít vrchol stupně 0. Proto vezmeme libovolný strom T a v něm libovolný vrchol v. Sestrojíme nyní co nejdelší cestu S v T začínající ve v:

* S začne libovolnou hranou vycházející z v;
* v každém dalším vrcholu u, do kterého se dostaneme a má stupeň větší než 1, lze pak pokračovat cestu S další novou hranou.

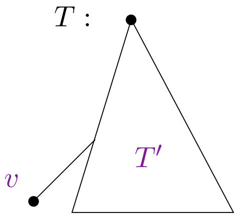


Pokud by se v S poprvé zopakoval některý vrchol, získali bychom kružnici. Proto cesta S musí jednou skončit v nějakém vrcholu stupně 1 v T. □

Věta 7.11. *Strom na n vrcholech má přesně $n-1$ hran pro $n \geq 1$.* □

Důkaz: Toto tvrzení dokážeme indukcí podle n.

* Strom s jedním vrcholem má $n-1=0$ hran. □

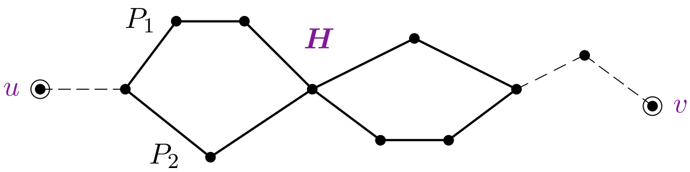


* Nechť T je strom na $n>1$ vrcholech.

  Podle Tvrzení 7.10 má T vrchol v stupně 1. Označme $T' = T - v$ graf vzniklý z T odebráním vrcholu v. □

  Pak T' je také souvislý bez kružnic, tudíž strom na $n-1$ vrcholech. Dle indukčního předpokladu T' má $n-1-1$ hran, a proto T má $n-1-1+1 = n-1$ hran. □

Věta 7.12. *Mezi každými dvěma vrcholy stromu vede právě jediná cesta.* □



Důkaz: Jelikož strom T je souvislý dle definice, mezi libovolnými dvěma vrcholy u, v vede nějaká cesta. □

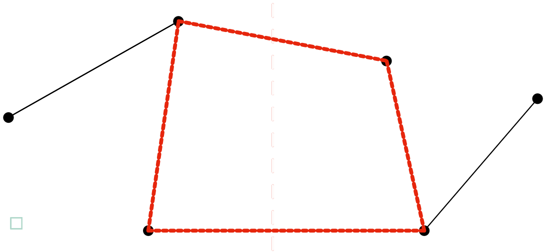
Pokud by existovaly dvě různé cesty P_1, P_2 mezi u, v, tak bychom vzali jejich symetrický rozdíl, podgraf $H = P_1 \Delta P_2$ s neprázdnou množinou hran, kde H zřejmě má všechny stupně sudé. □Na druhou stranu se však podgraf stromu musí opět skládat z komponent stromů, a tudíž obsahovat vrchol stupně 1 podle Tvrzení 7.10, což je spor. □ □

Důsledek 7.13. *Přidáním jedné hrany do stromu vznikne právě jedna kružnice.*

Alternativní charakterizace stromů

Na dané množině vrcholů je (vzhledem k inkluzi množin hran) *strom*

- minimální souvislý graf (plyne z Věty 7.12)
- a zároveň maximální acyklický graf (plyne z Důsledku 7.13).

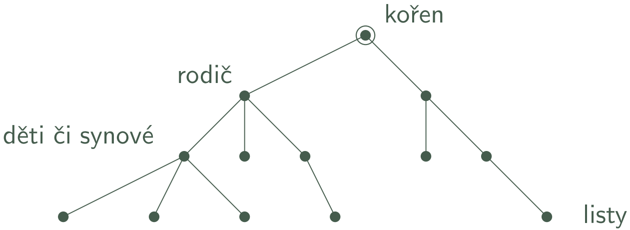


□

Kořenový strom

Definice: Strom T s vyznačeným vrcholem $r \in V(T)$, zkráceně dvojice (T, r), nazýváme *kořenovým stromem* s *kořenem* r. □

V přirozeně přeneseném významu se u kořenových stromů používají pojmy rodič, děti/synové, sourozenci, předchůdce, následovník/potomek, atd.



Definice: *Listem* stromu nazveme každý vrchol stupně 1.

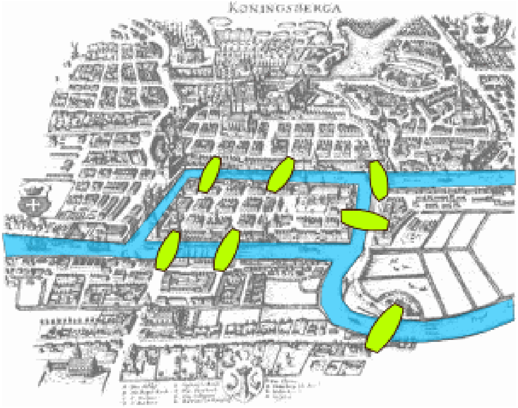
V kořenovém stromu nazveme *listem* každý vrchol, který nemá potomky.

7.5 Dodatek: 7 mostů jedním tahem

Pravd. *nejstarší zaznamenaný výsledek teorie grafů* pochází od L. Eulera – slavný problém 7 mostů v Královci / Königsbergu / dnešním Kaliningradě. □

O jaký problém se 7-mi mosty se tehdy v Königsbergu 18-tého století jednalo?

Příklad 7.14. *Je možné při jedné procházce suchou nohou přejít po každém ze sedmi vyznačených mostů v Königsbergu právě jednou?*



□

Sled a tah v grafu

Definice: *Sledem* délky n v grafu G rozumíme posloupnost vrcholů a hran

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n) \,, \square$$

ve které vždy hrana e_i má koncové vrcholy v_{i-1}, v_i.

Všimněte si, že sled je vlastně jakákoliv procházka po hranách grafu z u do v. Příkladem sledu může být průchod IP paketu internetem (včetně cyklení). □

Definice: *Tah* je sled v grafu bez opakování hran. □

Uzavřený tah je tahem, který končí ve vrcholu, ve kterém začal. *Otevřený tah* je tahem, který končí v jiném vrcholu, než ve kterém začal.

Jistě znáte dětskou hříčku s „kreslením domečku jedním tahem“... Ano, to je v podstatě totéž, co *tah* v grafu (kterým „kreslíme“ hrany našeho grafu□).

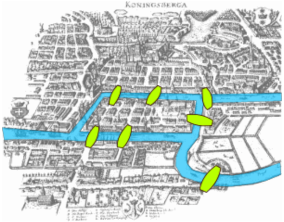
Fakt: Cesta je přesně otevřený tah bez opakování vrcholů.
Kružnice je přesně uzavřený tah bez opakování vrcholů.

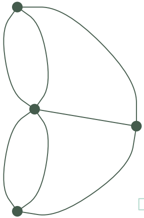
Eulerovské grafy

Slibované řešení Příkladu 7.14 od Leonharda Eulera zní takto:

Věta 7.15. *Graf G lze pokrýt (nakreslit) jedním uzavřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G jsou sudého stupně.* □

A jak je tomu v Příkladu 7.14? Zde nejprve nakreslíme příslušný (multi)graf, ve kterém vrcholy jsou jednotlivé kusy země oddělené vodou (tj. dva říční ostrovy a dva břehy):





□

Jaké jsou stupně vrcholů tohoto grafy? Je to $3, 3, 3, 5$, neboli všech 7 hran–mostů města Königsbergu nelze dle Věty 7.15 pokrýt jedním uzavřeným tahem (ani otevřeným).

Důsledek 7.16. *Graf G lze pokrýt (nakreslit) jedním otevřeným tahem právě když G je souvislý a všechny vrcholy v G až na dva jsou sudého stupně.*

Důkaz: Dokazujeme oba směry ekvivalence Věty 7.15. Pokud lze G pokrýt jedním uzavřeným tahem, tak je zřejmě G souvislý a navíc má každý stupeň sudý, neboť uzavřený tah každým průchodem vrcholem pokryje dvě hrany. □

Naopak zvolíme mezi všemi uzavřenými tahy T obsaženými v G ten (jeden z) nejdelší. Tvrdíme, že T obsahuje všechny hrany grafu G.

- Pro spor vezměme graf $G' = G - E(T)$, o kterém předpokládejme, že je neprázdný. Jelikož G' má taktéž všechny stupně sudé, je (z indukčního předpokladu) libovolná jeho komponenta $C \subseteq G'$ pokrytá jedním uzavřeným tahem T_C. □
- Vzhledem k souvislosti grafu G každá komponenta $C \subseteq G'$ protíná náš tah T v některém vrchole w, a tudíž lze oba tahy T_C a T „propojit přes w". To je spor s naším předpokladem nejdelšího možného T, neboť $T \cup T_C$ je delším tahem v G. □

□

Důkaz důsledku: Nechť u, v jsou dva vrcholy grafu G mající lichý stupeň, neboli dva (předpokládané) konce otevřeného tahu pro G. Do G nyní přidáme nový vrchol w spojený hranami s u a v. Tím jsme náš případ převedli na předchozí případ grafu se všemi sudými stupni. □