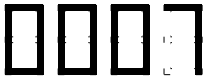


Jméno:

UČO:

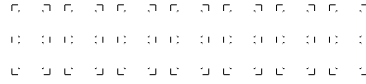
Skupina:



líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

2. [2 body] Mějme abecedu $\Sigma = \{a, b\}$.

Každý z následujících jazyků popište pomocí jednoprvkových jazyků $\{a\}$ a $\{b\}$ s využitím konečného počtu operací sjednocení (\cup), průniku (\cap), rozdílu (\setminus), doplňku (co-), zřetězení (\cdot), mocniny ($^0, ^2, ^3, \dots$), iterace ($*$) a pozitivní iterace ($^+$), mimo operací, které jsou zakázány u konkrétního jazyka. Navíc můžete používat pomocné jazyky rovněž zadané tímto způsobem.

- \emptyset bez použití průniku (\cap) a rozdílu (\setminus)
- $\{a, b\}^*$ bez použití iterace ($*$)
- $\text{co-}\{a, ab\} \cdot \text{co-}\{b, ba\}$ bez použití doplňku (co-) a rozdílu (\setminus)
- $\{a\}^*$ bez použití iterace ($*$) a pozitivní iterace ($^+$)

Pro každou část této úlohy uvedeme alespoň jedno možné řešení.

a) Prázdný jazyk \emptyset je zřejmě doplňkem jazyka Σ^* . Ten přitom umíme zapsat jako

$$\Sigma^* = \{a, b\}^* = (\{a\} \cup \{b\})^*.$$

Dohromady

$$\emptyset = \text{co-}(\{a\} \cup \{b\})^*.$$

b) Chceme, aby do našeho jazyka patřila všechna slova nad abecedou Σ . Stačí tedy vyrobit prázdný jazyk $\emptyset = \{a\} \cap \{b\}$ a udělat jeho doplněk. Dostáváme

$$\{a, b\}^* = \text{co-}(\{a\} \cap \{b\}).$$

c) Označme $L_1 = \text{co-}\{a, ab\}$ a $L_2 = \text{co-}\{b, ba\}$. Hledaný jazyk je tedy zřetězením $L_1 \cdot L_2$. Všimněme si, že v obou jazycích L_1 a L_2 je prázdné slovo a jejich sjednocení tvoří celou Σ^* . Ukážeme, že $L_1 \cdot L_2 = \Sigma^*$, tedy že náš jazyk obsahuje každé slovo nad abecedou $\{a, b\}$. Nechť $u \in \Sigma^*$ je libovolné. Rozlišíme dva případy:

i. Platí $u \in \{a, ab\}$. Potom zřejmě $u \in L_2$. Současně víme, že platí $\varepsilon \in L_1$, tedy

$$u = \varepsilon \cdot u \in L_1 \cdot L_2.$$

ii. Platí $u \notin \{a, ab\}$. Potom ale $u \in L_1$. Díky $\varepsilon \in L_2$ dostáváme

$$u = u \cdot \varepsilon \in L_1 \cdot L_2.$$

Celkově dostáváme tedy

$$L = (\{a\} \cup \{b\})^*.$$

d) Označme $L = \{a\}^*$. Uvědomme si, že L je jazyk všech slov nad abecedou Σ , která neobsahují písmeno b . Dokážeme, že jeho komplement $\text{co-}L$ lze vyjádřit jako $\Sigma^* \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$.

Nechť $u \in \Sigma^* \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$ je libovolné. Zřejmě u obsahuje písmeno b , tedy $u \in \text{co-}L$. Naopak nechť $v \in \text{co-}L$ je libovolné, tedy v obsahuje písmeno b . Pak v lze rozložit na $v = v_1 \cdot b \cdot v_2$, kde $v_1, v_2 \in \Sigma^*$, tedy $v = v_1 \cdot b \cdot v_2 \in \Sigma^* \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$. Dohromady $\text{co-}L = \Sigma^* \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*$. Tedy

$$L = \text{co-}(\Sigma^* \cdot \{b\} \cdot \Sigma^*),$$

kde $\Sigma^* = \{a, b\}^* = \text{co-}(\{a\} \cap \{b\})$.