

Jméno:

UČO:

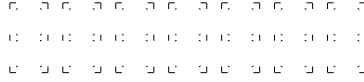
Skupina:



líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [3 body] O každém z následujících jazyků nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

Tedy je-li vaše odpověď, že se jedná o regulární jazyk, uveďte příslušnou regulární gramatiku nebo konečný automat včetně všech formálních náležitostí. Pokud se podle vás naopak o regulární jazyk nejedná, dokažte tuto skutečnost pomocí *Lemmatu o vkládání* (Pumping lemma).

a) $L_a = \{auv \mid u, v \in \{b, c\}^*, |u| \text{ je násobkem } |v|, |u| \geq 1, |v| \geq 1\}$

b) $L_b = \{vau \mid u, v \in \{b, c\}^*, |u| \text{ je násobkem } |v|, |u| \geq 1, |v| \geq 1\}$

1. Jazyk L_a je regulární. Na začátku každého slova z jazyka L_a musí být znak a a za ním následují další nejméně dva znaky, protože obě podslova u a v jsou délky alespoň jedna. Uvažme slovo w , které odpovídá těmto podmínkám, a jeho rozdělení $w = auv$ takové, že $|v| = 1$. Pak jistě platí podmínka, že $|u|$ je násobkem $|v|$, protože $|u| = 1 \cdot |v|$. Do jazyka L_a tedy patří všechna slova ve tvaru $w = a \cdot \{b, c\}^+ \cdot \{b, c\}$.

Jazyk L_a můžeme popsat např. regulární gramatikou $G = (\{S, A, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$P = \{S \rightarrow aA, \\ A \rightarrow bB \mid cB, \\ B \rightarrow bB \mid cB \mid b \mid c\}.$$

2. Jazyk L_b není regulární. Jeho neregularitu dokážeme obměnou tvrzení Lemmatu o vkládání.

- Buď $n \in \mathbb{N}$ libovolné přirozené číslo, nadále pevné.
- Zvolme slovo $w = b^n ab^n$. Slovo w jistě patří do jazyka L_b a jeho délka je $|w| = 2n + 1 \geq n$.
- Uvažme rozdělení slova w na libovolné tři části $w = xyz$ splňující podmínky $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$. Pak slova x, y, z musí být ve tvaru

$$x = b^k, \\ y = b^l, \\ z = b^{n-k-l} ab^n$$

pro vhodná čísla $k \in \mathbb{N}_0$ a $l \in \mathbb{N}$, kde $k + l \leq n$.

- Zvolme $i = 2$ a uvažme slovo xy^iz . Dosazením, použitím definice mocniny slova a algebraickými úpravami dostaneme

$$xy^2z = b^k \cdot b^{2l} \cdot b^{n-k-l} ab^n = b^{n+l} ab^n.$$

Protože $l > 0$ a $n > 0$, je zřejmé, že $|b^{n+l}| > |b^n| > 0$, a proto $|u| = n$ není násobkem $|v| = n + l$. Slovo xy^2z tedy jistě nepatří do jazyka L_b . Z Lemmatu o vkládání pak vyplývá, že jazyk L_b není regulární.