Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [2 body] Tento úkol se skládá ze 3 nezávislých podúkolů:

a) Nechť L je jazyk nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:
Pokud $L \cup L^R$ není regulární, pak ani L není regulární. **[0.5 bodu]**

b) Nechť $\mathcal{T}$ je třída všech neprázdných jazyků nad abecedou $\{a, b\}$, jejichž všechna slova obsahují písmeno a. Rozhodněte a dokažte, zda je třída $\mathcal{T}$ uzavřená na následující operace:

- průnik,
- sjednocení,
- doplněk,
- rozdíl,
- zřetězení,
- mocnina (libovolná, včetně 0),
- iterace,
- pozitivní iterace.

Pro každou uvedenou operaci buďto dokažte, že je na ni třída $\mathcal{T}$ uzavřená, nebo uveďte konkrétní protipříklad. **[1 bod]**

c) Dokažte nebo vyvraťte následující tvrzení:
Nechť K je konečný a L libovolný jazyk nad abecedou $\{a, b\}$. Potom $(\text{co}-K \cup L)$ je ko-konečný (jazyk je ko-konečný, je-li jeho doplněk konečný). **[0.5 bodu]**

---

a) **Tvrzení platí.**

Uvědomíme-li si, že se jedná o implikaci a že obměna implikace zachovává její pravdivostní hodnotu, lze toto tvrzení dokázat využitím uzávěrových vlastností regulárních jazyků.
Tedy:

$$L \cup L^R \text{ není regulární} \implies L \text{ není regulární}$$

Obměna:

$$L \text{ je regulární} \implies L \cup L^R \text{ je regulární}$$

Jelikož je třída regulárních jazyků uzavřená na operaci sjednocení i na zrcadlový obraz, platí obměna, a tedy i původní implikace.

Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

b) Uvažme postupně všechny operace:

- Třída $\mathcal{T}$ **není** uzavřená na průnik.
  Uvažme jazyky $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{aa\}$. Zjevně $L_1, L_2 \in \mathcal{T}$. Jejich průnikem získáme jazyk $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, který z definice do $\mathcal{T}$ nepatří (jedná se o třídu *neprázdných* jazyků).

- Třída $\mathcal{T}$ **je** uzavřená na sjednocení.
  Uvažme libovolné dva jazyky $L_1, L_2 \in \mathcal{T}$. Pak z definice $\mathcal{T}$ pro všechna slova v L_1 a pro všechna slova v L_2 platí, že obsahují písmeno a. Všechna slova patřící do jazyka, který vznikne sjednocením L_1 a L_2, nutně patří do alespoň jednoho z nich, a tedy splňují podmínku, že obsahují a. Protože jsou L_1 i L_2 neprázdné, jejich sjednocením vznikne neprázdný jazyk.

- Třída $\mathcal{T}$ **není** uzavřená na doplněk.
  Uvažme jazyk $L = \{a\}$. Zjevně $L \in \mathcal{T}$. Doplňkem jazyka získáme jazyk co$-L = \Sigma^* \setminus \{a\}$. Jazyk co$-L$ obsahuje třeba slovo b neobsahující písmeno a. Proto neplatí, že všechna slova v jazyku obsahují a, a tedy co$-L \notin \mathcal{T}$.

- Třída $\mathcal{T}$ **není** uzavřená na rozdíl.
  Uvažme jazyky $L_1 = L_2 = \{a\}$. Rozdílem těchto jazyků získáme jazyk $L_1 \setminus L_2 = \emptyset$, který do $\mathcal{T}$ nepatří, protože je prázdný.

- Třída $\mathcal{T}$ **je** uzavřená na zřetězení.
  Uvažme libovolné dva jazyky $L_1, L_2 \in \mathcal{T}$. Jejich zřetězení je jazyk

  $$L = \{w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}.$$

  Z definice $\mathcal{T}$ slova w_1 a w_2 obsahují písmeno a, tedy i $w_1 \cdot w_2$ obsahuje a. Tedy všechna slova jazyka L budou obsahovat a. Zřetězením dvou neprázdných jazyků jistě získáme neprázdný jazyk, tedy $L_1 \cdot L_2 \in \mathcal{T}$.

- Třída $\mathcal{T}$ **není** uzavřená na mocninu.
  Uvažme libovolný jazyk $L \in \mathcal{T}$. Pro nultou mocninu platí, že $L^0 = \{\varepsilon\}$. Epsilon, jakožto prázdné slovo, neobsahuje žádná písmena, zejména pak neobsahuje písmeno a, tedy $L^0 \notin \mathcal{T}$.

- Třída $\mathcal{T}$ **není** uzavřená na iteraci.
  Uvažme jazyk $L = \{a\}$. Zjevně $L \in \mathcal{T}$. Iterace jazyka vznikne sjednocením všech jeho mocnin, proto $L^0 \subseteq L^*$. Protože platí $\varepsilon \in L^0$, taky $\varepsilon \in L^*$. Jak jsme již ukázali u důkazu uzavřenosti na mocninu, ε neobsahuje písmeno a, a proto $L^* \notin \mathcal{T}$.

- Třída $\mathcal{T}$ **je** uzavřená na pozitivní iteraci.
  Uvažme libovolný jazyk $L \in \mathcal{T}$. Pozitivní iteraci získáme sjednocením všech mocnin jazyka vyjma nulté mocniny, tedy $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$. Dokážeme, že $L^i \in \mathcal{T}$ pro libovolné $i \geq 1$. Důkaz provedeme indukcí k i.
  - Protože první mocnina jazyka je jazyk samotný, platí, že $L^1 \in \mathcal{T}$.

- Nechť platí, že $L^i \in \mathcal{T}$. L^{i+1} je definováno jako $L \cdot L^i$. Protože $L \in \mathcal{T}$, $L^i \in \mathcal{T}$ a již jsme dokázali uzavřenost třídy $\mathcal{T}$ na zřetězení, taky $L^{i+1} \in \mathcal{T}$.

Platí tedy, že všechny pozitivní mocniny jazyka L patří do $\mathcal{T}$. Protože pozitivní iteraci získáme jejich sjednocením a $\mathcal{T}$ je uzavřená na (nekonečné) sjednocení, platí, že $\mathcal{T}$ je uzavřená na pozitivní iteraci (dříve jsme dokázali, že třída $\mathcal{T}$ je uzavřená na sjednocení dvou jazyků, argumentace pro nekonečné sjednocení je analogická, každé slovo výsledného jazyka musí patřit do některého z původních jazyků a výsledek nemůže být prázdný).

c) **Tvrzení platí.**

Z definice ko-konečnosti dokazujeme, že co$-$((co$-K$) $\cup$ L) je konečný.

Podle De Morganových pravidel upravíme ((co$-K$) $\cup$ L) na co$-$($K \cap$ co$-L$), čímž dohromady získáme co$-$(co$-$($K \cap$co$-L$)). Komplementy se vykrátí, tedy ve výsledku potřebujeme dokázat, že $K \cap$ co$-L$ je konečný. Protože K je konečný a průnikem můžeme počet slov v jazyku leda zmenšit, výsledný jazyk bude konečný.