Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [2 body] O následujícím jazyku nad abecedou $\Sigma = \{a, b, c\}$ rozhodněte, zda je bezkontextový.

$$L = \{a^n w \mid w \in \{b, c\}^*,\ n \in \mathbb{N}_0,\ n < \#_b(w) < \#_c(w)\}$$

Své tvrzení dokažte: V případě, že je vaše odpověď kladná, tj. že se jedná o bezkontextový jazyk, uveďte příslušnou bezkontextovou gramatiku nebo zásobníkový automat. V opačném případě své tvrzení dokažte pomocí *Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky* (Pumping lemma pro CFL). Pro jistotu připomeňme, že $\mathbb{N}_0$ značí množinu všech nezáporných celých čísel.

Pomocí Lemmatu o vkládání ukážeme, že se nejedná o bezkontextový jazyk. Postupujeme těmito kroky:

- Nechť $n \in \mathbb{N}$ je libovolné.
- Zvolme $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$. Platí, že $z \in L$
- Nechť $uvwxy = z$ je libovolný rozklad slova z takový, že $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$.
- Ukážeme, že existuje $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $uv^iwx^iy \notin L$.

Nejprve si však všimněme, že libovolné slovo $\bar{z}$ z jazyka L splňuje nerovnosti $\#_a(\bar{z}) < \#_b(\bar{z}) < \#_c(\bar{z})$. Buď nyní $uvwxy$ libovolný rozklad slova $z = a^n b^{n+1} c^{n+2}$ splňující podmínky $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq n$. Díky tomu, že jsou písmena a a c ve slově z oddělena celkem $n+1$ písmeny b, nemohou se v jeho podslově vwx délky maximálně n vyskytovat písmena a a c zároveň. Rozlišme následujících pět případů, které mohou pro rozdělení slova z nastat:

1) Slovo vx obsahuje výhradně znaky a. Protože má vx nenulovou délku (není ε), platí $vx = a^k$ pro vhodné $k > 0$. Volme $i = 2$ a označme $\tilde{z} = uv^2wx^2y$. Slovo $\tilde{z}$ obsahuje $n+k$ písmen a a $n+1$ písmen b, protože počet písmen b ve slovech $\tilde{z}$ a z je stejný. Odtud plyne, že slovo $\tilde{z}$ nepatří do jazyka L, protože $\#_a(\tilde{z}) = n + k \geq n + 1 = \#_b(\tilde{z})$.

2) Slovo vx obsahuje právě znaky a a b (tedy od každého alespoň jeden a přitom žádný znak c). Volíme opět $i = 2$ a $\tilde{z} = uv^2wx^2y$. Označme $l = \#_b(vx)$, pak platí, že $l \geq 1$. Protože platí $\#_b(\tilde{z}) = n + 1 + l \geq n + 2 = \#_c(\tilde{z})$, neleží slovo $\tilde{z}$ v jazyce L.

3) Slovo vx se skládá výhradně ze znaků b. Nyní volíme znovu $i = 2$ a $\tilde{z} = uv^2wx^2y$. Dále označme $l = \#_b(vx)$, pak platí, že $l \geq 1$. Dostáváme $\tilde{z} \notin L$, protože $\#_b(\tilde{z}) = n + 1 + l \geq n + 2 = \#_c(\tilde{z})$.

4) Slovo vx obsahuje právě znaky b a c. Volíme $i = 0$ a $\tilde{z} = uwy$. Označme $l = \#_b(vx)$, pak platí, že $l \geq 1$. Platí $\#_b(\tilde{z}) = n + 1 - l \leq n = \#_a(\tilde{z})$, odkud $\tilde{z} \notin L$.

5) Slovo vx obsahuje výhradně znaky c. Volíme znovu $i = 0$ a $\tilde{z} = uwy$. Označme $l = \#_c(vx)$, pak platí, že $l \geq 1$ a tedy platí $\#_c(\tilde{z}) = n + 2 - l \leq n + 1 = \#_b(\tilde{z})$ a proto $\tilde{z} \notin L$.

Pro všechna platná rozdělení jsme tedy nalezli $i \in \mathbb{N}_0$, pro které slovo uv^iwx^iy nepatří do jazyka L. Díky Lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky tak víme, že jazyk L není bezkontextový.