Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [2 body] Nechť Σ je libovolná abeceda a D, L, L_1, L_2 jsou jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte.

a) $L_1 \cup L_2$ není bezkontextový $\implies$ ani jeden z jazyků L_1 a L_2 není bezkontextový

b) L_1 je bezkontextový a L_2 je kontextový $\implies$ $L_1 \cup L_2$ je kontextový

c) D je deterministický bezkontextový a L je bezkontextový $\implies$ $L \cap \text{co}{-}D$ je bezkontextový

d) L je rekurzivní $\implies$ L^R je rekurzivní

Mohou se vám hodit známé jazyky z přednášky a cvičení, jmenovitě bezkontextové, deterministické bezkontextové nebo naopak jazyky, o nichž víme, že nejsou bezkontextové. Pokud použijete tyto jazyky, nemusíte dokazovat jejich vlastnosti deklarované na přednášce/cvičení.

Některá tvrzení může být třeba dokázat konstruktivně transformací vhodného formalismu pro zápis dané třídy jazyků. V takovém případě nemusíte uvádět formální popis transformace, postačí výstižný slovní popis.

---

a) Tvrzení neplatí, což ukážeme tak, že najdeme protipříklad. Tedy dvojici jazyků, která danou implikaci nesplňuje. Nechť $L_1 = \emptyset$ a $L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Je známo, že L_2 není bezkontextový jazyk. (A tuto vlastnost o něm umíme snadno ukázat použitím lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky.) Proto je splněn předpoklad a $L_1 \cup L_2$ není bezkontextový. Přitom ale $L_1 = \emptyset$ je bezkontextový (zřejmě je konečný, a tedy regulární, tedy i bezkontextový). Vyvrátili jsme tak platnost zadané implikace.

b) Ukážeme ještě silnější tvrzení, a to že sjednocení libovolných dvou kontextových jazyků je opět kontextovým jazykem, tedy že předpoklad lze zesílit tak, že L_1 i L_2 jsou kontextové. (Jedná se o zesílení, protože každý bezkontextový jazyk je kontextový.) Důkaz provedeme konstrukcí kontextové gramatiky, která generuje jazyk $L_1 \cup L_2$. Uvažme kontextovou gramatiku $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$, resp. $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S_2)$ generující jazyk L_1, resp. L_2. Pro jednoduchost, abychom se vyhnuli kolizi ve značení neterminálů z těchto gramatik, označíme neterminály z první gramatiky indexem 1 a z druhé indexem 2. Nechť $G = (N, \Sigma, P, S)$ je gramatika s počátečním neterminálem S, množinou neterminálů $N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$ a množinou pravidel $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\}$. Vidíme, že tato gramatika je kontextová, protože nám oproti pravidlům v množinách P_1 a P_2 přibyla jen dvě další $S \to S_1 | S_2$, která splňují podmínku kladenou na pravidla kontextové gramatiky. Rovněž je zřejmé, že tato gramatika generuje sjednocení $L_1 \cup L_2$, z čehož plyne, že je tento jazyk kontextový.

c) Zadaná implikace neplatí, což ukážeme protipříkladem. Označme $R = \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Dále nechť $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ a $D = \text{co}{-}R$. Oba jazyky R a L jsou deterministické bezkontextové (plyne z důkazu věty 3.80 ve skriptech). Protože je třída DCFL uzavřená na komplement, je také D deterministický bezkontextový jazyk. Jazyky D a L tak splňují předpoklad implikace ze zadání. Ovšem jazyk $L \cap \text{co}{-}D = L \cap R = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ platnost zadaného tvrzení vyvrací, protože, jak již bylo řečeno v části a), není bezkontextový.

d) Tvrzení platí, o čemž se přesvědčíme konstrukcí Turingova stroje $\mathcal{R}$ rozhodujícího jazyk L^R. Označme $\mathcal{T}$ Turingův stroj rozhodující jazyk L. Stroj $\mathcal{R}$ sestrojíme úpravou původního Turingova stroje $\mathcal{T}$. Nový stroj nejprve překopíruje vstupní data na pásce za konec těchto dat a to v obráceném pořadí a poté bude simulovat výpočet původního stroje na takto invertovaných datech.

Podrobnější popis: Stroj $\mathcal{R}$ nejprve přejde na konec pásky a první znak $\sqcup$ přepíše na speciální symbol $\blacktriangleright$ (který není v páskové abecedě stroje $\mathcal{T}$), který bude značit hranici mezi vstupními daty a jejich invertovanou kopií. Za tento symbol bude postupně přenášet data před tímto symbolem tak, že poslední (nejbližší k $\blacktriangleright$ zleva) neškrtnutý symbol v datech škrtne a vloží jej na první volné místo za symbolem $\blacktriangleright$ (nejbližší zprava). Škrtání se realizuje přepsáním na speciální pracovní symbol X (který není v páskové abecedě stroje $\mathcal{T}$). Tedy libovolný symbol A na pásce stroj $\mathcal{R}$ přepíše na X a ihned se přepne do speciálního stavu q_A. V tomto stavu se posouvá doprava, dokud nenarazí na první symbol $\sqcup$ (který bude za symbolem $\blacktriangleright$), který přepíše na A a opakuje tento proces, dokud není celý vstup překopírován. Pak $\mathcal{R}$ přepíše symbol $\blacktriangleright$ na $\triangleright$ a simuluje výpočet stroje $\mathcal{T}$ na invertovaném vstupu.