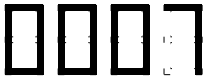


Jméno:

UČO:

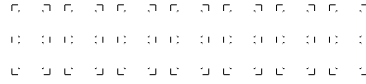
Skupina:



líst



učo



body



Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [2 body] Nechť  $\Sigma$  je libovolná abeceda a  $D, L, L_1, L_2$  jsou jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte.

- $L_1 \cup L_2$  není bezkontextový  $\implies$  ani jeden z jazyků  $L_1$  a  $L_2$  není bezkontextový
- $L_1$  je bezkontextový a  $L_2$  je kontextový  $\implies L_1 \cup L_2$  je kontextový
- $D$  je deterministický bezkontextový a  $L$  je bezkontextový  $\implies L \cap \text{co-}D$  je bezkontextový
- $L$  je rekurzivní  $\implies L^R$  je rekurzivní

Mohou se vám hodit známé jazyky z přednášky a cvičení, jmenovitě bezkontextové, deterministické bezkontextové nebo naopak jazyky, o nichž víme, že nejsou bezkontextové. Pokud použijete tyto jazyky, nemusíte dokazovat jejich vlastnosti deklarované na přednášce/cvičení.

Některá tvrzení může být třeba dokázat konstruktivně transformací vhodného formalismu pro zápis dané třídy jazyků. V takovém případě nemusíte uvádět formální popis transformace, postačí výstižný slovní popis.

- Tvrzení neplatí, což ukážeme tak, že najdeme protipříklad. Tedy dvojici jazyků, která danou implikaci nesplňuje. Nechť  $L_1 = \emptyset$  a  $L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ . Je známo, že  $L_2$  není bezkontextový jazyk. (A tuto vlastnost o něm umíme snadno ukázat použitím lemmatu o vkládání pro bezkontextové jazyky.) Proto je splněn předpoklad a  $L_1 \cup L_2$  není bezkontextový. Přitom ale  $L_1 = \emptyset$  je bezkontextový (zřejmě je konečný, a tedy regulární, tedy i bezkontextový). Vyvrátili jsme tak platnost zadané implikace.
- Ukážeme ještě silnější tvrzení, a to že sjednocení libovolných dvou kontextových jazyků je opět kontextovým jazykem, tedy že předpoklad lze zesílit tak, že  $L_1$  i  $L_2$  jsou kontextové. (Jedná se o zesílení, protože každý bezkontextový jazyk je kontextový.) Důkaz provedeme konstrukcí kontextové gramatiky, která generuje jazyk  $L_1 \cup L_2$ . Uvažme kontextovou gramatiku  $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S_1)$ , resp.  $G_2 = (N_2, \Sigma, P_2, S_2)$  generující jazyk  $L_1$ , resp.  $L_2$ . Pro jednoduchost, abychom se vyhnuli kolizi ve značení neterminálů z těchto gramatik, označíme neterminály z první gramatiky indexem 1 a z druhé indexem 2. Nechť  $G = (N, \Sigma, P, S)$  je gramatika s počátečním neterminálem  $S$ , množinou neterminálů  $N = N_1 \cup N_2 \cup \{S\}$  a množinou pravidel  $P = P_1 \cup P_2 \cup \{S \rightarrow S_1 | S_2\}$ . Vidíme, že tato gramatika je kontextová, protože nám oproti pravidlům v množinách  $P_1$  a  $P_2$  přibyla jen dvě další  $S \rightarrow S_1 | S_2$ , která splňují podmínku kladenou na pravidla kontextové gramatiky. Rovněž je zřejmé, že tato gramatika generuje sjednocení  $L_1 \cup L_2$ , z čehož plyne, že je tento jazyk kontextový.
- Zadaná implikace neplatí, což ukážeme protipříkladem. Označme  $R = \{a^n b^n c^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ . Dále nechť  $L = \{a^m b^n c^n \mid m, n \in \mathbb{N}\}$  a  $D = \text{co-}R$ . Oba jazyky  $R$  a  $L$  jsou deterministické bezkontextové (plyne z důkazu věty 3.80 ve skriptech). Protože je třída DCFL uzavřená na komplement, je také  $D$  deterministický bezkontextový jazyk. Jazyky  $D$  a  $L$  tak splňují předpoklad implikace ze zadání. Ovšem jazyk  $L \cap \text{co-}D = L \cap R = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$  platnost zadaného tvrzení vyvrací, protože, jak již bylo řečeno v části a), není bezkontextový.
- Tvrzení platí, o čemž se přesvědčíme konstrukcí Turingova stroje  $\mathcal{R}$  rozhodujícího jazyk  $L^R$ . Označme  $\mathcal{T}$  Turingův stroj rozhodující jazyk  $L$ . Stroj  $\mathcal{R}$  sestrojíme úpravou původního Turingova

Jméno:

UČO:

Skupina:

0007

list

2

učo

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo listu vyplňte  
zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

stroje  $\mathcal{T}$ . Nový stroj nejprve překopíruje vstupní data na pásce za konec těchto dat a to v obráceném pořadí a poté bude simulovat výpočet původního stroje na takto invertovaných datech.

**Podrobnější popis:** Stroj  $\mathcal{R}$  nejprve přejde na konec pásky a první znak  $\sqcup$  přepíše na speciální symbol  $\blacktriangleright$  (který není v páskové abecedě stroje  $\mathcal{T}$ ), který bude značit hranici mezi vstupními daty a jejich invertovanou kopií. Za tento symbol bude postupně přenášet data před tímto symbolem tak, že poslední (nejbližší k  $\blacktriangleright$  zleva) neškrtnutý symbol v datech škrtně a vloží jej na první volné místo za symbolem  $\blacktriangleright$  (nejbližší zprava). Škrtnání se realizuje přepsáním na speciální pracovní symbol  $X$  (který není v páskové abecedě stroje  $\mathcal{T}$ ). Tedy libovolný symbol  $A$  na pásce stroj  $\mathcal{R}$  přepíše na  $X$  a ihned se přepne do speciálního stavu  $q_A$ . V tomto stavu se posouvá doprava, dokud nenarazí na první symbol  $\sqcup$  (který bude za symbolem  $\blacktriangleright$ ), který přepíše na  $A$  a opakuje tento proces, dokud není celý vstup překopírován. Pak  $\mathcal{R}$  přepíše symbol  $\blacktriangleright$  na  $\triangleright$  a simuluje výpočet stroje  $\mathcal{T}$  na invertovaném vstupu.