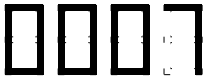


Jméno:

UČO:

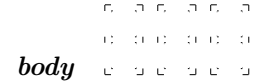
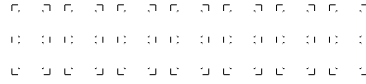
Skupina:



líst



učo



body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

1. [2 body] Dokažte, že problém určit, zda stav  $q$  Turingova stroje  $\mathcal{M}$  je dosažitelný, je nerozhodnutelný. Jinými slovy, dokažte, že jazyk

$$\text{USEFUL} = \{\langle \mathcal{M}, q \rangle \mid \text{stav } q \text{ Turingova stroje } \mathcal{M} \text{ je dosažitelný}\}$$

není rekurzivní. Stav  $q$  Turingova stroje  $\mathcal{M}$  nazveme dosažitelným, pokud existuje vstup, na kterém se výpočet stroje  $\mathcal{M}$  dostane do stavu  $q$ .

Návod: Ukažte, že platí vztah  $N \leq_m \text{USEFUL}$ , kde  $N$  je vhodný nerekurzivní jazyk. Zdůvodněte, proč tudíž jazyk USEFUL nemůže být rekurzivní.

*Důkaz.* Ukážeme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce  $f$ , pro kterou platí:

$$w \in \text{NONEMPTY} \Leftrightarrow f(w) \in \text{USEFUL}$$

Z existence této funkce pak plyne, že  $\text{NONEMPTY} \leq_m \text{USEFUL}$ , a protože NONEMPTY není rekurzivní, nemůže být rekurzivní ani USEFUL.

Označme  $\Sigma$  abecedu jazyka NONEMPTY a  $\Phi$  abecedu jazyka USEFUL. Potom definujeme funkci  $f: \Sigma^* \rightarrow \Phi^*$  pro každé  $w \in \Sigma^*$  následujícím předpisem.

$$f(w) = \begin{cases} \langle \mathcal{T}_{\text{rej}}, q_{\text{acc}} \rangle, & \text{jestliže } w \text{ není kódem žádného TS,} \\ \langle \mathcal{M}, q_{\text{acc}} \rangle, & \text{jestliže } w = \langle \mathcal{M} \rangle \text{ pro nějaký TS } \mathcal{M} \text{ a } q_{\text{acc}} \text{ je akceptující stav } \mathcal{M}, \end{cases}$$

kde  $\mathcal{T}_{\text{rej}}$  je Turingův stroj, který zamítá každý vstup.

Funkce  $f$  je jistě totální. Zdůvodníme, že je také vyčíslitelná. První případ funkce  $f$  zvládneme jednoduše, pro nekorektní vstup  $w$  funkce  $f$  vrátí konstantu – TS, který zamítá každé slovo ( $\mathcal{T}_{\text{rej}}$ ). Máme-li vstup tvaru  $\langle \mathcal{M} \rangle$ , pak  $f$  vrací ten samý stroj a akceptující stav stroje  $\mathcal{M}$ . Tudíž funkce  $f$  je vyčíslitelná.

Ukážeme, že funkce  $f$  je navíc redukce NONEMPTY na USEFUL, důkazem obou implikací v definici redukce.

„ $\Rightarrow$ “: Předpokládejme nejprve, že platí  $w \in \text{NONEMPTY}$ , potom jistě  $w = \langle \mathcal{M} \rangle$  pro nějaký TS  $\mathcal{M}$ , a navíc  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$ , tedy existuje slovo, které  $\mathcal{M}$  akceptuje. Tudíž podle definice funkce  $f$  platí  $f(w) = \langle \mathcal{M}, q_{\text{acc}} \rangle$ . Jelikož  $\mathcal{M}$  akceptuje nějaké slovo, tak stav  $q_{\text{acc}}$  musí být dosažitelný. Z čehož plyne, že  $f(w) = \langle \mathcal{M}, q_{\text{acc}} \rangle \in \text{USEFUL}$ .

„ $\Leftarrow$ “: Dokážeme obměnou, předpokládáme tedy, že  $w \notin \text{NONEMPTY}$ . Pak mohou nastat dva případy.

1. Slovo  $w$  není kódem žádného TS. Pak  $f(w) = \langle \mathcal{T}_{\text{rej}}, q_{\text{acc}} \rangle$  a  $f(w) \notin \text{USEFUL}$ , protože stroj  $\mathcal{T}_{\text{rej}}$  nikdy neakceptuje, tudíž  $q_{\text{acc}}$  není dosažitelný.
2. Platí  $w = \langle \mathcal{M} \rangle$  pro nějaký TS  $\mathcal{M}$ . Pak podle definice funkce  $f$  platí  $f(w) = \langle \mathcal{M}, q_{\text{acc}} \rangle$ . Jelikož ale  $\langle \mathcal{M} \rangle \notin \text{NONEMPTY}$ , tak  $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$ , z čehož plyne, že žádné slovo není akceptované a tedy že  $q_{\text{acc}}$  není v  $\mathcal{M}$  dosažitelný. A tedy  $f(w) \notin \text{USEFUL}$ .

Nalezli jsme redukci  $\text{NONEMPTY} \leq_m \text{USEFUL}$ , a tedy jazyk USEFUL není rekurzivní.  $\square$