Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0123456789

1. [2 body] Dokažte, že problém určit, zda stav q Turingova stroje $\mathcal{M}$ je dosažitelný, je nerozhodnutelný. Jinými slovy, dokažte, že jazyk

$$\text{USEFUL} = \{\langle \mathcal{M}, q\rangle \mid \text{stav } q \text{ Turingova stroje } \mathcal{M} \text{ je dosažitelný}\}$$

není rekurzivní. Stav q Turingova stroje $\mathcal{M}$ nazveme dosažitelným, pokud existuje vstup, na kterém se výpočet stroje $\mathcal{M}$ dostane do stavu q.

Návod: Ukažte, že platí vztah $N \leq_m$ USEFUL, kde N je vhodný nerekurzivní jazyk. Zdůvodněte, proč tudíž jazyk USEFUL nemůže být rekurzivní.

Důkaz. Ukážeme, že existuje totálně vyčíslitelná funkce f, pro kterou platí:

$$w \in \text{NONEMPTY} \Leftrightarrow f(w) \in \text{USEFUL}$$

Z existence této funkce pak plyne, že NONEMPTY $\leq_m$ USEFUL, a protože NONEMPTY není rekurzivní, nemůže být rekurzivní ani USEFUL.

Označme Σ abecedu jazyka NONEMPTY a Φ abecedu jazyka USEFUL. Potom definujeme funkci $f\colon \Sigma^* \to \Phi^*$ pro každé $w \in \Sigma^*$ následujícím předpisem.

$$f(w) = \begin{cases} \langle \mathcal{T}_{\text{rej}}, q_{acc}\rangle, & \text{jestliže } w \text{ není kódem žádného TS,} \\ \langle \mathcal{M}, q_{acc}\rangle, & \text{jestliže } w = \langle \mathcal{M}\rangle \text{ pro nějaký TS } \mathcal{M} \text{ a } q_{acc} \text{ je akceptující stav } \mathcal{M}, \end{cases}$$

kde $\mathcal{T}_{\text{rej}}$ je Turingův stroj, který zamítá každý vstup.
Funkce f je jistě totální. Zdůvodníme, že je také vyčíslitelná. První případ funkce f zvládneme jednoduše, pro nekorektní vstup w funkce f vrátí konstantu – TS, který zamítá každé slovo ($\mathcal{T}_{\text{rej}}$). Máme-li vstup tvaru $\langle \mathcal{M}\rangle$, pak f vrací ten samý stroj a akceptující stav stroje $\mathcal{M}$. Tudíž funkce f je vyčíslitelná.

Ukážeme, že funkce f je navíc redukce NONEMPTY na USEFUL, důkazem obou implikací v definici redukce.

„$\Rightarrow$“: Předpokládejme nejprve, že platí $w \in$ NONEMPTY, potom jistě $w = \langle \mathcal{M}\rangle$ pro nějaký TS $\mathcal{M}$, a navíc $\mathcal{L}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$, tedy existuje slovo, které $\mathcal{M}$ akceptuje. Tudíž podle definice funkce f platí $f(w) = \langle \mathcal{M}, q_{acc}\rangle$. Jelikož $\mathcal{M}$ akceptuje nějaké slovo, tak stav q_{acc} musí být dosažitelný. Z čehož plyne, že $f(w) = \langle \mathcal{M}, q_{acc}\rangle \in$ USEFUL.

„$\Leftarrow$“: Dokážeme obměnou, předpokládáme tedy, že $w \notin$ NONEMPTY. Pak můžou nastat dva případy.

1. Slovo w není kódem žádného TS. Pak $f(w) = \langle \mathcal{T}_{\text{rej}}, q_{acc}\rangle$ a $f(w) \notin$ USEFUL, protože stroj $\mathcal{T}_{\text{rej}}$ nikdy neakceptuje, tudíž q_{acc} není dosažitelný.

2. Platí $w = \langle \mathcal{M}\rangle$ pro nějaký TS $\mathcal{M}$. Pak podle definice funkce f platí $f(w) = \langle \mathcal{M}, q_{acc}\rangle$. Jelikož ale $\langle \mathcal{M}\rangle \notin$ NONEMPTY, tak $\mathcal{L}(\mathcal{M}) = \emptyset$, z čehož plyne, že žádné slovo není akceptované a tedy že q_{acc} není v $\mathcal{M}$ dosažitelný. A tedy $f(w) \notin$ USEFUL.

Nalezli jsme redukci NONEMPTY $\leq_m$ USEFUL, a tedy jazyk USEFUL není rekurzivní. □