Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [2 body] Nechť Σ je libovolná abeceda a $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ jsou libovolné jazyky nad touto abecedou. O každém z následujících tvrzení rozhodněte, zda je pravdivé, a vaše tvrzení dokažte:

a) $A \leq_m \{a\} \iff A$ je rekurzivní

b) $A \leq_m B$ a $C \leq_m D \implies A \cap C \leq_m B \cap D$

---

a) Tvrzení **platí**.

Důkaz. Nejprve dokážeme směr $A \leq_m \{a\} \implies A$ je rekurzivní:

Jazyk $\{a\}$ je konečným jazykem nad nějakou abecedou Φ (obsahující písmeno a). Tento jazyk je tedy regulární, proto i rekurzivní. Pokud se A redukuje na jazyk, který je rekurzivní, pak i A musí být rekurzivní (viz slajdy 10 z přednášky).

Směr A je rekurzivní $\implies A \leq_m \{a\}$:

Definujme funkci $f : \Sigma^* \to \Phi^*$ následovně:

$$f(w) = \begin{cases} a, & \text{jestliže } w \in A, \\ aa & \text{jinak} \end{cases}$$

Ukážeme, že f je redukcí z A do $\{a\}$.
Buď $w \in \Sigma^*$ libovolné. Platí $w \in A \Leftrightarrow f(w) = a \Leftrightarrow f(w) \in \{a\}$. Jazyk A je rekurzivní, takže funkce f je totálně vyčíslitelná (pro vypočítání f stačí modifikovat TM rozhodující A tak, aby místo přechodu do q_{acc} zapsal na pásku a a místo přechodu do q_{rej} zapsal na pásku aa). Tedy platí, že $A \leq_m \{a\}$.

Dokázali jsme obě implikace, a tedy že $A \leq_m \{a\} \iff A$ je rekurzivní.

□

b) Tvrzení **neplatí** a vyvrátíme jej protipříkladem.

Důkaz. Zvolíme $A = B = C = \{a\}$ a $D = \{b\}$ nad abecedou $\Sigma = \{a, b\}$.

Platí, že $A \leq_m B$, kde funkce $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je identita. Tato funkce je jistě redukcí z A do B a je totálně vyčíslitelná.

Platí i $C \leq_m D$:

Definujme funkci $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ následovně:

$$f(w) = \begin{cases} b, & \text{jestliže } w = a, \\ bb & \text{jinak} \end{cases}$$

Ukážeme, že f je redukcí z C do D.
Buď $w \in \Sigma^*$ libovolné. Platí $w \in C \Leftrightarrow w = a \Leftrightarrow f(w) = b \Leftrightarrow f(w) \in D$. Funkce f je zřejmě totálně vyčíslitelná. Tedy platí, že $C \leq_m D$.

Nyní však neplatí $A \cap C \leq_m B \cap D$, neboli $\{a\} \leq_m \emptyset$. Kdyby platilo $\{a\} \leq_m \emptyset$, tak by podle definice redukce a toho, že $a \in \{a\}$, existovala funkce f taková, že $f(a) \in \emptyset$, to ale není možné.

□