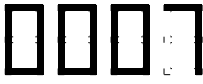


Jméno:

UČO:

Skupina:



líst

učo

body

Oblast strojově snímaných informací. Svě učo a číslo lístu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte.

0123456789

1. [2 body] Definujme jazyk ANF-SAT následovně:

$$\text{ANF-SAT} = \{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ je splnitelná formule v ANF}\}$$

Výroková formule je v ANF, pokud obsahuje pouze konjunkce, negace a výrokové proměnné. Příklad formule v ANF:

$$a \wedge \neg(b \wedge c \wedge \neg(a \wedge \neg c))$$

Dokažte, že jazyk ANF-SAT je NP-úplný. Vaší úlohou je tedy ukázat, že ANF-SAT je NP-těžký (nejlépe redukcí z nějakého jiného NP-těžkého problému) a zároveň, že patří do třídy NP. Použitou redukcí co nejpřesněji popište a zdůvodněte, proč se jedná o polynomiální redukcí.

Abychom ukázali, že problém ANF-SAT je NP-těžký, redukoveme na něj nějaký problém, o kterém víme, že je NP-těžký. Konkrétně najdeme redukcí $3\text{SAT} \leq_p \text{ANF-SAT}$.

Potřebujeme tedy najít funkci f , totálně vyčíslitelnou v polynomiálním čase takovou, že

$$\langle \varphi \rangle \in 3\text{SAT} \Leftrightarrow f(\langle \varphi \rangle) \in \text{ANF-SAT}$$

Nechť tedy $3\text{SAT} \subseteq \Sigma^*$ a $\text{ANF-SAT} \subseteq \Phi^*$. Funkce $f: \Sigma^* \rightarrow \Phi^*$ je definována následovně:

$$f(\langle \varphi \rangle) = \begin{cases} \langle a \wedge \neg a \rangle & \text{jestliže } \langle \varphi \rangle \text{ není kódem žádné formule v 3CNF,} \\ \langle \varphi' \rangle & \text{jinak.} \end{cases}$$

Kde φ' vznikne z φ tak, že každou klauzuli $(l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ z φ , kde l_1, l_2 a l_3 jsou literály, převedeme na ekvivalentní konjunktivní klauzuli $\neg(\neg l_1 \wedge \neg l_2 \wedge \neg l_3)$. Funkce f je zřejmě totální a vyčíslitelná Turingovým strojem pracujícím v polynomiálním čase, jelikož transformaci dokážeme provést lineárním průchodem přes všechny klauzule v φ .

Zbývá ještě dokázat, že platí:

$$\langle \varphi \rangle \in 3\text{SAT} \Leftrightarrow f(\langle \varphi \rangle) \in \text{ANF-SAT}$$

„ \Rightarrow “: Předpokládejme, že $\langle \varphi \rangle \in 3\text{SAT}$. φ je tedy splnitelná formule v 3CNF a $f(\langle \varphi \rangle) = \langle \varphi' \rangle$. V modifikované formuli φ' se z definice f nenachází žádná disjunkce a tedy je v ANF. A jelikož každá klauzule v φ byla převedena na ekvivalentní konjunktivní klauzuli, tak i φ' musí být splnitelná.

„ \Leftarrow “: Z ekvivalence formulí φ a φ' vyplývá, že φ' je splnitelná právě tehdy když je i původní formule φ splnitelná. Tím je tento směr implikace dokázán.

ANF-SAT patří do třídy NP

Prislušnost jazyku ANF-SAT do třídy NP ukážeme konstrukcí nedeterministického TS, který rozhoduje ANF-SAT. Turingův stroj bude pracovat podobně ako stroj pro 3SAT v třech krocích:

1. Skontroluje, jestli vstup je v ANF, pokud ne zamítne.
2. Nedeterministicky zvolí ohodnocení proměnných ve vstupní formuli.
3. Vyhodnotí, jestli je ohodnocení splňující. Pokud je ohodnocení splňující akceptuje, jinak zamítá.

Jazyk ANF-SAT tedy náleží do NP.

Závěr

Jelikož ANF-SAT patří do třídy NP a je NP-těžký, pak je z definice NP-úplný.