Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 1 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

2. [2 body] Nechť L a R jsou libovolné jazyky nad libovolnou abecedou Σ. O následujících tvrzeních rozhodněte, zda jsou pravdivá, a svá rozhodnutí zdůvodněte:

---

a) $L \leq_p SAT \implies L \leq_p TQBF$ **Platí**

Důkaz. Jestliže $L \leq_p SAT$, pak platí $L \in \mathsf{NP}$, potom ale také $L \in \mathsf{PSPACE}$ (protože $\mathsf{NP} \subseteq \mathsf{PSPACE}$). Každý problém v PSPACE se redukuje na $TQBF$ ($TQBF$ je PSPACE-úplný), a proto musí nutně platit $L \leq_p TQBF$.

Alternativně: Nechť f je redukce z L na SAT (existuje z předpokladu implikace), g je redukce ze SAT na $TQBF$ (ta jistě existuje, protože $SAT \in \mathsf{PSPACE}$). Pak $g \cdot f$ je redukce z L na $TQBF$ a tato redukce je polynomiální, protože složení dvou polynomiálních funkcí je opět polynomiální funkce. Tedy $L \leq_p TQBF$. □

b) $L \in \mathsf{NTIME}\left(3n^4+5\right) \implies L \in \mathsf{SPACE}\left(n^{12}\right)$ **Platí**

Důkaz. Ukážeme, že $\mathsf{NTIME}\left(3n^4+5\right) \subseteq \mathsf{SPACE}\left(n^{12}\right)$, z toho pak přímo plyne implikace ze zadání.

$$\mathsf{NTIME}\left(3n^4+5\right) \overset{(1)}{=} \mathsf{NTIME}\left(n^4\right) \overset{(2)}{\subseteq} \mathsf{NSPACE}\left(n^4\right) \overset{(3)}{\subseteq} \mathsf{SPACE}\left(n^8\right) \overset{(4)}{\subseteq} \mathsf{SPACE}\left(n^{12}\right)$$

Zdůvodníme nyní jednotlivé vztahy:

(1) z asymptotické složitosti ($3n^4+5 \in \Theta(n^4)$),

(2) konkrétní případ $\mathsf{NTIME}\left(f(n)\right) \subseteq \mathsf{NSPACE}\left(f(n)\right)$ (TS s časovou složitostí $f(n)$ může popsat nejvýše $f(n)$ políček pásky),

(3) ze Savitchovy věty,

(4) z asymptotické složitosti ($n^8 \in \mathcal{O}(n^{12})$). □

c) $L \in \mathsf{TIME}\left(n^4\right), R \in \mathsf{NTIME}\left(n^2\right) \implies L \cdot R \in \mathsf{NP}$ **Platí**

Důkaz. Z předpokladu implikace vyplývá, že:

- $L \in \mathsf{NP}$: $L \in \mathsf{TIME}\left(n^4\right)$, tedy je řešitelné v deterministickém polynomiálním čase, a tedy $L \in \mathsf{P}$, jelikož $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$, tak i $L \in \mathsf{NP}$,
- $R \in \mathsf{NP}$: $R \in \mathsf{NTIME}\left(n^2\right)$, tedy je řešitelné v nedeterministickém polynomiálním čase, a tedy $L \in \mathsf{NP}$.

Zároveň víme z přednášky, že třída NP je uzavřená na zřetězení, proto i $L \cdot R \in \mathsf{NP}$. □

Jméno: **UČO:** **Skupina:**

0007 *list* 2 *učo* *body*

Oblast strojově snímaných informací. Své učo a číslo listu vyplňte zleva dle vzoru číslic. Jinak do této oblasti nezasahujte. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

d) $L \leq_p ACC \implies L \notin \mathsf{NP}$ **Neplatí**

Důkaz. Neplatnost implikace lze dokázat protipříkladem.

Uvažme $L = \emptyset$ a Turingův stroj M, který akceptuje L. Dokážeme, že $L \leq_p ACC$: nechť f je redukce definovaná následovně:

$$f(x) = \langle M, \varepsilon \rangle$$

tedy f vždy vrátí stejnou hodnotu, dvojici obsahující kód stroje M a slova ε (M toto slovo neakceptuje a tedy tato dvojice nepatří do ACC). Tato redukce je jistě polynomiální, protože běží v konstantním čase. Tedy $\emptyset \leq_p ACC$, zároveň ale $\emptyset \in \mathsf{NP}$ ($\emptyset$ je rozhodnutelný v konstantním čase, tedy je jistě v NP), máme tedy protipříklad. $\square$