



Faculty of Informatics  
Masaryk University Brno

---

# Cvičení k předmětům IB005 Formální jazyky a automaty a IB102 Automaty, gramatiky a složitost

poslední modifikace 24. listopadu 2016

---

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podílelo mnoho studentů a cvičící předmětů *IB005* a *IB102* Jiří Barnat, Vojtěch Řehák a Jan Strejček.

# Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky  $L_1, L_2$  nad abecedou  $\{x, y, z\}$ , kde  $L_1 = \{xy, y, yx\}$ ,  $L_2 = \{y, z\}$ . Vypočítejte:

- $L_1 \cup L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- $L_1 \cdot L_2, L_2 \cdot L_1$
- $L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+$
- $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

- $\emptyset^*, \emptyset^+, \{\varepsilon\}^*, \{\varepsilon\}^+$
- $\emptyset \cup \{\varepsilon\}, \emptyset \cap \{\varepsilon\}, \emptyset \cap L, \{\varepsilon\} \cap L$
- $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}, \emptyset \cdot L, \{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky  $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$ , kde  $L_1 = \{a, aa, ba\}$ ,  $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$ .

- Vypočítejte  $L_1 \cup L_2$ .
- Vypočítejte  $L_1 \cap L_2$ .
- Vypočítejte  $L_1 \cdot L_2$ .
- Rozhodněte, zda platí  $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$ .
- Najděte slovo  $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$ .
- Rozhodněte, zda platí  $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$ . Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků  $L_1, L_2$ ? Pro pokročilý: platí  $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$ ?
- Rozhodněte, zda platí
  - $aabaabc \in L_2^4$
  - $baaabc \in L_2^6$
  - $ababc \in L_2^3$
- Popište  $co - L_2$  (komplement jazyka  $L_2$ ).

1.4 Buď  $L$  libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

- pro  $\forall i \in \mathbb{N}$  platí  $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$
- pro  $\forall i \in \mathbb{N}$  platí  $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$
- najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda  $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda  $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků  $L_1 = \{a\}$ ,  $L_2 = \{b\}$  nad abecedou  $\{a, b\}$  a množinových operací sjednocení ( $\cup$ ), průniku ( $\cap$ ), konkatenace ( $\cdot$ ), iterace ( $^*$ ,  $^+$ ) a doplňku ( $co-$ ) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

- obsahují alespoň 2 znaky  $a$
- mají sudou délku
- začínají znakem  $a$  a končí znakem  $b$
- začínají a končí stejným znakem
- obsahují podslovo  $aba$
- splňují b) a c)
- nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  dokažte, zda platí, nebo neplatí:

- $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
- $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
- $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
- pro  $\forall i \in \mathbb{N}$  platí  $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
- $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
- $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
- $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika  $G$  a jakého je typu?

- $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c, d\}, P, S)$ , kde
 
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aSb \mid cAd, \\ cA \rightarrow aB \mid Ca, \\ Bd \rightarrow Sb \mid A, \\ Cad \rightarrow ab \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$
- $G = (\{S, A\}, \{b, c, a\}, P, S)$ , kde
 
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow bS \mid cS \mid aA, \\ A \rightarrow aA \mid bA \mid cA \mid a \mid b \mid c \end{array} \right\}$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů ( $S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11}$ ).

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bC, \\ B \rightarrow aC \mid bS, \\ C \rightarrow aB \mid bA \end{array} \right\}$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

- $L = \{a, b, c, d\}^*$

- b)  $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*$ ;  $i = 2, 10, 100$
- c)  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$
- d)  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k, k \geq 0\}$
- e)  $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}$
- f)  $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- g)  $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \text{ první 3 znaky } w = \text{ poslední 3 znaky } w\}$
- h)  $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } abb\}$
- i)  $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1, k, l \geq 0\}$
- j)  $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 5}\}$
- k)  $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 3}\}$
- l)  $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \dots, 9\}^*, w \text{ je zápis přir. čísla dělitelného 25}\}$

# Deterministické konečné automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat:  $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

- Uveďte jinou formu zápisu automatu.
- Popište jazyk akceptovaný konečným automatem  $A$ .
- Diskutujte variantu konečného automatu, kde  $F = \{q_3, q_2\}$ ;  $\delta(q_3, a) = q_0$

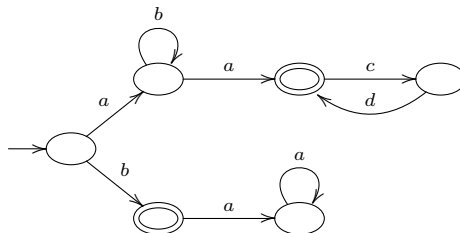
2.2 Konstruuje **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

- $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$
- $\{w \mid w \in \{a\}^*; |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l; k, l \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$
- $\{w \mid w \in \{a, b\}^*; w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$
- $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$
- $(\{a\} \cup \{b\} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\})^*$

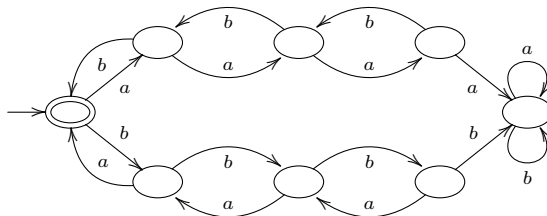
2.3 Konstruuje **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou  $\{a, b, c, d\}$

- $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } babb\}$
- $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

2.4 Pomocí množin  $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$  a množinových operací sjednocení ( $\cup$ ), průniku ( $\cap$ ), konkatenace ( $\cdot$ ), iterace ( $^*, ^+$ ) a doplňku ( $co-$ ) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ( $\#_a(w) = \#_b(w)$  je špatná odpověď)



2.6 Pomocí věty o vkládání dokažte, že jazyk L není regulární:

- a)  $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$
- b)  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- c)  $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
- d)  $L = \{a^n \mid n = 2^i; i \geq 0\}$
- e)  $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$
- f)  $L = \{a^n b^{(n!)^2} \mid n \geq 0\}$
- g)  $L = \{c^i a^j b^k \mid j \leq k; i, j, k \in \mathbb{N}\}$

2.7 O každém z následujících jazyků nad abecedou  $\Sigma = \{a, b, c\}$  rozhodněte, zda je regulární, a vaše tvrzení dokažte.

- a)  $\{uv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| < |v|\}$
- b)  $\{ucv \mid u, v \in \{a, b\}^*, |u| < |v|\}$

2.8 Pro pokročilé: Zkonstruuje konečný automat A rozpoznávající jazyk  $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$ . Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že  $L(A) = L$ .

2.9 Konstruuje deterministické FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

# Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	2	3
2	5	2
3	3	5
$\leftarrow 4$	12	2
$\leftarrow 5$	7	8
6	4	9
7	12	11
8	4	6
9	10	8
$\leftarrow 10$	3	2
$\leftarrow 11$	12	6
12	3	10

b)

	$a$	$b$
$\leftrightarrow 1$	3	2
2	6	4
3	3	5
$\leftarrow 4$	4	2
5	10	8
6	6	7
$\leftarrow 7$	7	5
$\leftarrow 8$	8	2
$\leftarrow 9$	11	2
10	10	9
$\leftarrow 11$	11	5

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převed'te do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	5	2
2	2	8
3	2	7
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	1
6	2	5
$\leftarrow 7$	8	6
8	2	4
9	8	9

	$a$	$b$
$\rightarrow 1$	4	2
2	2	5
3	3	6
4	4	2
$\leftarrow 5$	5	3
$\leftarrow 6$	6	2

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
1	3	1
→ 2	9	4
3	–	1
← 4	9	4
5	8	5
6	5	4
← 7	6	9
8	11	–
9	7	9
10	12	3
11	8	1
12	–	10

	<i>a</i>	<i>b</i>
A	B	A
← B	C	A
C	D	E
D	D	D
→ E	A	E

**3.3** Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 a) je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

	<i>a</i>	<i>b</i>
A	A	C
→ B	D	A
← C	D	A
D	C	D

**3.4** Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abc \text{ nebo } bba \text{ nebo } aba\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abc \text{ nebo } acbca \text{ nebo } bcabb\}$
- $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } aaaa\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ má čtvrtý symbol od konce } 1\}$
- $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ končí řetězcem } 01011\}$
- $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$
- $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

**3.5** K daným nedeterministickým FA zkonstruujte deterministické FA.

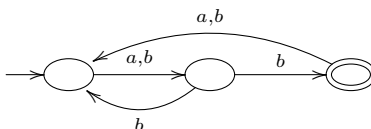
a)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ 1	{2,3}	{3,4}	{1}
← 2	{3}	{4}	{2}
3	{1,2,3}	{1}	{3,4}
4	{1}	{1}	{3,4}

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>
→ 1	{1,2}	{1}	∅
← 2	∅	{3}	{1}
3	∅	∅	{1,4}
4	{5}	∅	∅
5	∅	{6}	∅
6	{7}	∅	∅
← 7	∅	∅	∅

**3.6** Popište jazyk akceptovaný automatem:



**3.7** Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou  $\{x\}$  nebo  $\{x, y\}$ ?

**3.8** Dokažte, že neexistuje (totální deterministický) automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| \geq 4\}$



b)  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 5k, k \in \mathbb{N}_0\}$

**3.9** Najděte a formálně popište alespoň dvě relace  $\sim \subseteq \{a, b\}^* \times \{a, b\}^*$  splňující podmínky Nerodovy věty pro jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, w \text{ obsahuje podslovo } abb\}.$$

Určete indexy těchto relací.

**3.10** Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhill-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a)  $L = \{a^n \mid n = 2^i, i \geq 0\}$

b)  $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n, n, m > 0\}$

c)  $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^+\}$

d)  $L = \{a^i b^j \mid i \neq j; i, j \geq 0\}$

**3.11** Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 3k, k \geq 0\}$

**3.12** Každý jazyk jednoznačně určuje relaci  $\sim_L$  předpisem  $u \sim_L v$  právě když pro každé  $w$  platí  $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$ . Určete index této relace pro jazyky:

a)  $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$

b)  $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

**3.13** Necht'  $\Sigma = \{a, b\}$ . Uvažte následující relace na množině  $\Sigma^*$ :

a)  $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$

b)  $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$  nebo  $u$  i  $v$  končí na stejné písmeno

c)  $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$  a  $u$  i  $v$  končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk  $L$  takový, že  $\sim_L = \sim$ . Nakonec nalezněte jazyk  $L'$ , který je sjednocením některých tříd rozkladu  $\Sigma^*/\sim$ , ale přitom  $\sim_{L'} \neq \sim$ .

# Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, $\varepsilon$ -kroky, Kleeneho věta

4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$$G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

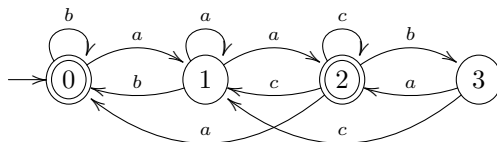
$$P = \{ S \rightarrow aA \mid bC \mid a \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow bB \mid aA \mid b \mid c, \\ B \rightarrow aB \mid bC \mid aC \mid cA \mid c, \\ C \rightarrow a \mid b \mid aA \mid bB \}$$

4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

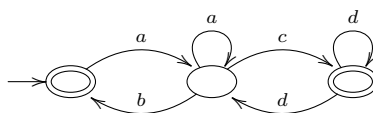
$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aX \mid bY \mid c, \\ X \rightarrow bX \mid bS, \\ Y \rightarrow bS \mid cZ, \\ Z \rightarrow aS \mid b \mid c \}$$

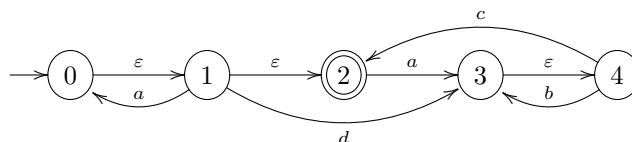
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



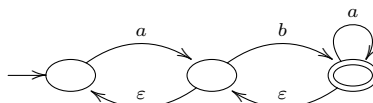
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s  $\varepsilon$ -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez  $\varepsilon$ -kroků.



4.6 K danému automatu s  $\varepsilon$ -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez  $\varepsilon$ -kroků.



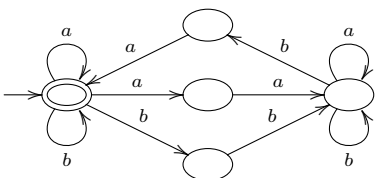
4.7 K danému automatu s  $\varepsilon$ -kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez  $\varepsilon$ -kroků.

	$a$	$b$	$c$	$\varepsilon$
$\rightarrow 1$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{2\}$
2	$\{5\}$	$\{3,5\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{6\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\{4\}$	$\emptyset$	$\{1,5\}$
5	$\{5\}$	$\emptyset$	$\{3\}$	$\{6\}$
$\leftarrow 6$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3,6\}$	$\{2\}$

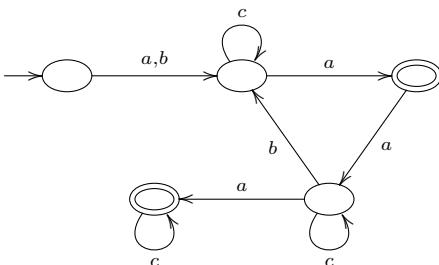
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní FA

- $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$
- $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$
- $((a + b)^* + c)^* + d)^*$

4.9 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ končí na } ab\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ začíná a končí stejným symbolem } \}$
- $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků  $\mathcal{R}$  a nejmenší třídou

- $M_1$ , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku  $(\cup, \cdot, \cap)$ .
- $M_2$ , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu  $(\cup, \cap, co-)$ .
- $M_3$ , která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině  $(\cup, \cap, ^n)$ .

# Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

**5.1** Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky  $L_1, L_2, L_3, \dots$  regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

**5.2** Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků  $L_1, L_2, L_3, \dots$  aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

**5.3** Nechtě  $L_1, L_2$  jsou neregulární jazyky nad abecedou  $\{a, b\}$ . Dokažte nebo vyvráťte, zda je či není regulární:

- a)  $L_1 \cap L_2$
- b)  $L_1 \cup L_2$
- c)  $L_1 \setminus L_2$
- d)  $L_1 \cdot L_2$
- e)  $L_1^*$
- f)  $co-L_1$

**5.4** Nechtě  $L_1$  je regulární a  $L_1 \cap L_2$  je neregulární jazyk. Platí, že jazyk  $L_2$  je nutně neregulární?

**5.5** Platí následující implikace?

- a)  $L_1$  je regulární,  $L_2$  je neregulární  $\Rightarrow L_1 \cap L_2$  je neregulární
- b)  $L_1$  je regulární,  $L_2$  je neregulární  $\Rightarrow L_1 \cap L_2$  je regulární
- c)  $L_1$  je regulární,  $L_2$  je neregulární  $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$  je neregulární
- d)  $L_1$  je regulární,  $L_2$  je neregulární  $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$  je regulární
- e)  $L_1$  je regulární,  $L_2$  je neregulární  $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$  je neregulární
- f)  $L_1$  je regulární,  $L_2$  je neregulární  $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$  je regulární

**5.6 Def:** operace  $\odot$  rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky  $L_1$  a  $L_2$  regulární, pak i jazyk  $L_1 \odot L_2$  je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky  $L_1$  a  $L_2$ , aby jazyk  $L_1 \odot L_2$  byl regulární.

**5.7** Nechtě  $L$  je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky  $L^\#$  jsou regulární:

- a)  $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \text{ takové, že } u.v \in L\}$
- b)  $L^\# = \{w \mid \text{existuje } x, y, z \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

**5.8** Dokažte, že pro libovolný jazyk  $L$  a libovolný konečný jazyk  $K$  platí:

- a)  $L$  je regulární  $\iff L \setminus K$  je regulární
- b)  $L$  je regulární  $\iff L \cup K$  je regulární

**5.9 Def:** Homomorfismus  $h : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$  je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

**Def:** Nechť  $L$  je jazyk, pak  $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$

**Def:** Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc  $h(c) = \varepsilon$  pak  $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že  $\mathcal{R}$  je uzavřena na  $h, h^{-1}$ .

**5.10** Nechť je dána abeceda  $\{a, b, c\}$  a homomorfismus  $h$ ;  $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$ . Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

**5.11** Nechť je dána abeceda  $\{a, b, c\}$  a homomorfismus  $h$ ;  $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$ . Určete:

- $h^{-1}(aabaaabaa)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in \mathbb{N}\}$

**5.12** Dokažte nebo vyvráťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

# Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

- a)  $G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S)$ , kde  
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aB \mid bA \mid \varepsilon, \\ A \rightarrow aS \mid bAA, \\ B \rightarrow bS \mid aBB \end{array} \right\}$$
- b)  $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$ , kde  
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aAS \mid a, \\ A \rightarrow ba \mid Sba \end{array} \right\}$$

6.2 Pro následující gramatiku

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow AaB \mid BaA, \\ A \rightarrow AB \mid a, \\ B \rightarrow BB \mid b \end{array} \right\}$$

- a) najděte derivační strom s výsledkem  $bbbbaa$   
b) je tento strom určený jednoznačně?  
c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo  $bbbbaa$   
d) je gramatika jednoznačná?  
e) je jazyk  $L(G)$  jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristické vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$$G = (\{S\}, \{a\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \{ S \rightarrow SSS \mid a \}$$

- a) je gramatika jednoznačná?  
b) je jazyk  $L(G)$  jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk  $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$ .

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk  $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$ , je gramatika jednoznačná? Lze sestavit jednoznačnou gramatiku pro tento jazyk?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S), \text{ kde}$$
$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow aA \mid bB, \\ A \rightarrow aAB \mid aa \mid AC \mid AE, \\ B \rightarrow bBA \mid bb \mid CB \mid BF, \\ C \rightarrow DE, \\ D \rightarrow cc \mid DD, \\ E \rightarrow FF \mid FE, \\ F \rightarrow EcE \end{array} \right\}$$

**6.9** Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

**6.10** Je jazyk generovaný gramatikou  $G$  bezkontextový?

$G = (\{S, T\}, \{x, y\}, P, S)$ , kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow xT, \\ T \rightarrow Sx, \\ xTx \rightarrow y \end{array} \right\}$$

**6.11** Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a)  $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$

b)  $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w = w^R\}$

c)  $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d)  $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e)  $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f)  $L = \{uxv \mid u, x, v \in \{a, b, c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g)  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h)  $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

# Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

## 7.1 Odstraňte $\varepsilon$ -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC, \\ A \rightarrow AbA \mid BC, \\ B \rightarrow bB \mid b \mid cBbAa \mid \varepsilon, \\ C \rightarrow cD \mid c \mid Ab \mid \varepsilon, \\ D \rightarrow SSS \mid b \}$$

## 7.2 Odstraňte $\varepsilon$ -pravidla:

$$G = (\{S, A, B, C, D\}, \{b, c\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow ABC, \\ A \rightarrow Ab \mid BC, \\ B \rightarrow bB \mid b \mid Ab \mid \varepsilon, \\ C \rightarrow cD \mid c \mid Ac \mid \varepsilon, \\ D \rightarrow SSD \mid cSAc \}$$

## 7.3 Odstraňte $\varepsilon$ -pravidla:

$$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow 1X \mid Y1 \mid XZ, \\ X \rightarrow 0YZ1 \mid S1X \mid Y, \\ Y \rightarrow 1 \mid X1 \mid \varepsilon, \\ Z \rightarrow SZ \mid 0 \mid \varepsilon \}$$

## 7.4 Význam konstrukce množin $N_\varepsilon$ na příkladu

$$G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \{ A \rightarrow BC \mid a \mid \varepsilon, \\ B \rightarrow aB \mid ACC \mid b, \\ C \rightarrow cC \mid AA \mid c \}$$

## 7.5 Odstraňte jednoduchá pravidla. Diskuse o významu $N_A$ .

$$G = (\{S, X, Y, A, D, B, C\}, \{b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow X \mid Y, \\ A \rightarrow bS \mid D, \\ D \rightarrow ba, \\ B \rightarrow Sa \mid a, \\ X \rightarrow aAS \mid C, \\ C \rightarrow aD \mid S, \\ Y \rightarrow SBb \}$$

## 7.6 Převed'te do Chomského normální formy

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow SaSbS \mid aAa \mid bBb, \\ A \rightarrow aA \mid aaa \mid B \mid \varepsilon, \\ B \rightarrow Bb \mid bb \mid b \}$$



7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow 0H1 \mid 1L0 \mid \varepsilon, \\ H \rightarrow HH \mid 0H1 \mid LH \mid \varepsilon, \\ L \rightarrow LL \mid 1L0 \mid HL \mid \varepsilon \end{array} \right\}$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

$$\begin{array}{l} \text{a) } L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ \text{b) } L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\} \end{array}$$

7.9 Necht  $G$  je gramatika v CNF. Necht  $w \in L(G)$ ,  $|w| = n$ . Jaká je minimální a maximální délka odvození slova  $w$  v  $G$ ?

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Aa \mid Bb \mid aaA \mid SaA \mid Sbb, \\ A \rightarrow AAb \mid ab \mid Sbb, \\ B \rightarrow Bbb \mid BBB \mid bAb \end{array} \right\}$$

7.11 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow A1 \mid 0 \mid 1B, \\ A \rightarrow BS0 \mid 10 \mid SB0, \\ B \rightarrow 0B \mid B1B \mid S0 \end{array} \right\}$$

7.12 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow Xc \mid Yd \mid Yb, \\ X \rightarrow Xb \mid a, \\ Y \rightarrow SaS \mid Xa \end{array} \right\}$$

7.13 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} S \rightarrow TTt \mid Tt \mid TS \mid s, \\ T \rightarrow SsT \mid TsT \mid t \end{array} \right\}$$

7.14 Transformujte do Greibachové NT. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A), \text{ kde}$$

$$P = \left\{ \begin{array}{l} A \rightarrow BC, \\ B \rightarrow CD \mid AB, \\ C \rightarrow Aa \mid b, \\ D \rightarrow bA \mid DD \end{array} \right\}$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

$$\begin{array}{l} \text{a) } L = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\} \\ \text{b) } L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} \\ \text{c) } L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\} \end{array}$$

# Zásobníkové automaty

8.1 Daný ZA  $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \\ \delta(q_1, \varepsilon, A) &= \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, d, A) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} \\ \delta(q_3, \varepsilon, Z) &= \{(q_4, Z)\} & & \end{aligned}$$

- Načrtněte stavový diagram ZA  $A$ .
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu  $a^3b^2c$  (stačí na obrázku).
- Popište jazyk  $L(A)$ .

8.2 Je daný ZA  $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$ , kde

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) &= \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\ \delta(q_1, a, Y) &= \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_2, b, Y) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} \\ \delta(q_3, c, X) &= \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) &= \{(q_4, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

- Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud  $F = \{q_2\}$ .
- Popište jazyk akceptovaný automatem s původním  $F$ , tj.  $F = \{q_2, q_4\}$ .

8.3 Konstruuje ZA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

- $L = \{a^i b^j \mid i \neq j, i, j \geq 0\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*; w = w^R\}$
- $L = \{a^{3n} b^{2n} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{a^{3n+2} b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$
- $L = \{a^k b^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$
- $L = \{a^{n+m} b^{m+p} c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$
- $L = \{a^i b^j c^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^k b^k c^m \mid k, m \geq 1\}$
- $L = \{a^{k_1} b a^{k_2} b \dots b a^{k_r} \mid r > 1, k_i \geq 1 (i = 1, \dots, r; \text{existuje } p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný ZA  $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$  akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete  $L(A)$ .

$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, Z) &= \{(q_0, AZ)\} \\ \delta(q_0, a, A) &= \{(q_0, AA)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

**8.5** Daný ZA  $A = (\{q\}, \{(\cdot)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$  akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete  $L(A)$ .

$$\begin{aligned}\delta(q, (\cdot, Z) &= \{(q, L)\} \\ \delta(q, (\cdot, L) &= \{(q, LL)\} \\ \delta(q, (\cdot, L) &= \{(q, \varepsilon)\}\end{aligned}$$

**8.6** Pro danou  $G$  navrhnete (rozšířený) ZA, který provádí syntaktickou analýzu:

- a) shora dolů,
- b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *ababaa*.

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ , kde

$$P = \left\{ \begin{array}{l|l} S \rightarrow \varepsilon & abSA, \\ A \rightarrow AaB & aB \quad | \quad a, \\ B \rightarrow aSS & bA \end{array} \right\}$$

**8.7** Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převedte na standardní zásobníkový automat.

**8.8** Daný ZA  $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset)$  akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{aligned}\delta(q_0, a, A) &= \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) &= \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) &= \{(q_2, \varepsilon)\} \\ \delta(q_0, b, A) &= \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) &= \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) &= \{(q_0, A)\}\end{aligned}$$

**8.9** Daný ZA  $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, X\}, \delta, q_0, Z, \emptyset)$  akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AA)\} \quad \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AAA)\} \quad \delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \quad \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}$$

# Uzávěrové vlastnosti CFL

**9.1** O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá

- a)  $L_1, L_2$  bezkontextové  $\Rightarrow L_1 \cup L_2$  je kontextový
- b)  $L_1$  bezkontextový  $\wedge L_1 \cap L_2$  není bezkontextový  $\Rightarrow L_2$  není bezkontextový
- c)  $L_1$  regulární  $\wedge L_2$  bezkontextový  $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$  bezkontextový
- d)  $L_1$  konečný  $\wedge L_2$  bezkontextový  $\Rightarrow co-(L_1 \cap L_2)$  bezkontextový

**9.2** Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$$

$$R = L((a^*b^+a)^* + a^*)$$

Navrhněte ZA pro jazyk  $L \cap R$

$$\begin{array}{lll} \delta_L(q_0, x, Z) = \{(q_0, xZ)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, a) = p_0 \\ \delta_L(q_0, x, y) = \{(q_0, xy)\} & \forall x, y \in \{a, b\} & \delta_R(p_0, b) = p_1 \\ \delta_L(q_0, \varepsilon, x) = \{(q_1, x)\} & \forall x \in \{a, b, Z\} & \delta_R(p_1, b) = p_1 \\ \delta_L(q_1, x, x) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \forall x \in \{a, b\} & \delta_R(p_1, a) = p_0 \\ \delta_L(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\} & & \\ F_L = \{q_2\} & & F_R = \{p_0\} \end{array}$$

**9.3** Je dána bezkontextová gramatika

$$G = (\{S\}, \{a, b\}, P, S), \text{ kde}$$

$$P = \{ S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \}$$

- a) Má tato gramatika vlastnost sebevlození?
- b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevlození?
- c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?
- d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevlození a regularitou?

**9.4** Je dán bezkontextový jazyk  $L, L \subseteq \{a, b\}^*$

Zkonstruujeme nový jazyk  $L_1$  takto:

$$\text{a) } L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; xy \in L\}$$

$$\text{b) } L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a, b\}^*; yx \in L\}$$

Dokažte, že  $L_1$  je taky bezkontextový.

# Konstrukce Turingových strojů

**10.1** Navrhněte deterministický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk  $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

**10.2** Navrhněte deterministický jednopáskový TS se vstupní abecedou  $\{0, 1\}$  a takový, že výpočty na slovech tvaru  $0^*1^*$  jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

**10.3** Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásy) TS pro jazyk  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

**10.4** Navrhněte TS (determ. nebo nedeterm.) TS pro jazyk:

a)  $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$

b)  $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

c)  $L = \{a^p \mid p \text{ není prvočíslo}\}$

d)  $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w \text{ je binární zápis čísla } n\}$

# Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

**11.1** Objasněte rozdíl mezi pojmy TS akceptuje a TS rozhoduje.

**11.2** Je daný DTS  $T$  (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhnete k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{aligned}\delta(q, \triangleright) &= (q, \triangleright, R) & \delta(q, a) &= (p, A, R) \\ \delta(p, b) &= (q, a, L) & \delta(q, \sqcup) &= (p, A, R) \\ \delta(p, \sqcup) &= (q, a, L) & \delta(q, a) &= (q_{accept}, A, R)\end{aligned}$$

Kde  $\triangleright$  je levá koncová značka,  $\sqcup$  označuje prázdné políčko, stavy jsou  $\{p, q, q_{accept}\}$ ,  $q$  je počáteční stav, vstupní abeceda je  $\{a, b\}$  a pásková abeceda odpovídá množině  $\{\triangleright, \sqcup, A, a, b\}$ .

**11.3** O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

- $R$  je regulární,  $L$  je rekurzivně spočetný  $\Rightarrow R \cap L$  je regulární
- $L$  je rekurzivní  $\Rightarrow$  co- $L$  je rekurzivní
- $L$  je rekurzivní  $\Rightarrow L^*$  je rekurzivní
- $L$  je kontextový  $\Rightarrow$  co- $L$  je rekurzivní
- $L$  není rekurzivní  $\Rightarrow$  co- $L$  není rekurzivní
- $L$  není rekurzivní a  $R$  je rekurzivní  $\Rightarrow L \setminus R$  není rekurzivní
- $L$  není rekurzivní,  $R$  je rekurzivní a  $R \subseteq L \Rightarrow L \setminus R$  není rekurzivní

**11.4** Navrhnete gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n \text{ je mocnina } 2\}$

**11.5** Ukažte, že jazyk  $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TS } A \text{ zastaví svůj výpočet nad slovem } v\}$  je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

**11.6** Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

# Redukce

**12.1** Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- a)  $A \leq_m B \Rightarrow co-A \leq_m co-B$
- b)  $A \leq_m B$  a  $B$  je regulární  $\Rightarrow A$  je regulární
- c)  $A$  je rekurzivně spočetná a  $co-A \leq_m A \Rightarrow A$  je rekurzivní
- d)  $A$  je rekurzivně spočetná a  $A \leq_m co-A \Rightarrow A$  je rekurzivní
- e)  $A \leq_m B$  a  $A$  je rekurzivní  $\Rightarrow B$  je rekurzivní
- f)  $A$  je rekurzivně spočetná  $\Rightarrow A \leq_m HALT$

**12.2** Je dán jazyk  $A = \{\langle M \rangle \mid \text{výpočet TM } M \text{ na slově } \varepsilon \text{ je konečný}\}$ .  
Dokažte, že  $A$  není rekurzivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na  $A$ .)  
Je jazyk  $A$  rekurzivně spočetný?  
Je komplement jazyka  $A$  rekurzivně spočetný?

**12.3** Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[ \frac{aa}{a} \right], \left[ \frac{ab}{abab} \right], \left[ \frac{b}{a} \right], \left[ \frac{aba}{b} \right] \right\}$$

**12.4** Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu  $\{0, 1\}$ .

**12.5** Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.

# Složitost

**13.1** Rozhodněte, které z následujících vztahů platí. Odpovědi zdůvodněte.

- a)  $2n \in \mathcal{O}(n)$
- b)  $n^2 \in \mathcal{O}(n)$
- c)  $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n^2)$
- d)  $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$
- e)  $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$
- f)  $3n^2 + 4n + 17 \in \mathcal{O}(n^2 - n + 1)$
- g)  $(2n)! \in \mathcal{O}(n!^2)$

**13.2** Rozhodněte, zda platí následující vztah. Odpověď zdůvodněte.

$$g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \implies f(n) \in o(g(n))$$

**13.3** Dokažte, že třída P je uzavřená na operace sjednocení, komplement a zřetězení. Rozhodněte, na které z těchto operací je uzavřena třída NP. Odpověď zdůvodněte.

**13.4** Třída coNP je definována jako  $\text{coNP} = \{co-L \mid L \in \text{NP}\}$ . Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí. Odpovědi zdůvodněte.

- a)  $\text{coNP} = co\text{-NP}$
- b)  $L_1, L_2 \in \text{coNP} \implies L_1 \cap L_2 \in \text{coNP}$
- c)  $L_1 \in \text{NP} \wedge L_2 \subsetneq L_1 \wedge L_2 \in \text{coNP} \implies L_1 \setminus L_2 \in \text{NP}$

**13.5** Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné. U splnitelných formulí popište nějaké splňující přiřazení.

- a)  $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$
- b)  $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
- c)  $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$
- d)  $(u \vee \neg v \vee \neg w) \wedge (w \vee \neg y \vee z) \wedge (w \vee \neg z \vee x) \wedge (x \vee y \vee z)$
- e)  $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

**13.6** Dokažte, že následující problémy jsou NP-úplné.

- a) Problém Hamiltonovské cesty v grafu:  
 $HAMPATH = \{\langle G, s, t \rangle \mid G \text{ je orientovaný graf obsahující Hamiltonovskou cestu z } s \text{ do } t\}$
- b) Problém  $k$ -kliky ( $k$ -klika je úplný podgraf s  $k$  vrcholy):  
 $CLIQUE = \{\langle G, k \rangle \mid G \text{ je neorientovaný graf s } k\text{-klikou}\}$
- c) Problém podgrafového izomorfismu (Subgraph Isomorphism, SGI):  
 $SGI = \{\langle H, G \rangle \mid H = (V, E), G = (U, F) \text{ jsou neorientované grafy takové, že existuje injektivní zobrazení } f : V \rightarrow U \text{ splňující } (u, u') \in E \implies (f(u), f(u')) \in F\}$



**13.7** Určete vztahy inkluze/rovnost mezi následujícími dvojicemi složitostních tříd. Svoje tvrzení zdůvodněte.

- a)  $\text{TIME}(n^2)$  a  $\text{TIME}(n^3)$
- b)  $\text{SPACE}(2n^2)$  a  $\text{SPACE}(100n^2)$
- c)  $\text{SPACE}(n^2)$  a  $\text{TIME}(n^2)$
- d)  $\text{NSPACE}(n^2)$  a  $\text{SPACE}(n^5)$
- e)  $P$  a  $\text{TIME}(2^n)$

**13.8** Zkonstruuje jednopáskový deterministický Turingův stroj, který rozhoduje jazyk  $L = \{0^k1^k \mid k \geq 0\}$  v čase  $\mathcal{O}(n \log n)$ . Není nutné uvádět formální popis stroje.

# Zadání cvičení IB005

## 1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte základní terminologii a definice
- Připomeňte základní operace nad jazyky a přitom cvičte příklady 1.1 a 1.2
- Cvičte 1.3, u 1.3 d) nacvičte "neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem".
- Cvičte 1.4
- Cvičte 1.6
- Cvičte 1.7
- Cvičte 1.8 b) a c) (jednu inkluzi skutečně dokažte)
- Připomeňte pojem gramatiky
- Cvičte 1.9
- Dle zbývajících času, jinak za DÚ, příklady 1.10, 1.11

## 2. cvičení: Konečné automaty a regulární gramatiky

- K čemu slouží Konečné automaty?
- Na příkladu 2.1 vysvětlíte co jsou a jak fungují konečné automaty
- Uveďte formální definici DFA
- Příklad 2.2a-d,f (deterministické FA!)
- Příklad 2.2g,h volitelně dle času
- Příklad 2.3a
- Příklad 2.4
- Příklad 2.5
- Příklad 1.11

## 3. cvičení: Pumping lemma, (Myhill-)Nerodova věta

- Znění a použití Pumping Lemma pro regulární jazyky
- Příklad 2.6a poctivě, b zrychleně, g poctivě, e zrychleně
- Znění Nerodovy věty a Myhill-Nerodovy věty
- Vztah  $\sim$  a deterministických automatů a vztah  $\sim_L$  a minimálního automatu

- Příklad 3.9
- Příklad 3.12
- Příklad 3.10 jednu odrážku pořádně, další případně zrychleně

#### 4. cvičení: Minimalizace a kanonizace DFA, nedeterministické FA a determinizace

- Připomeňte si  $\sim_L$ .
- Definujte minimální konečný automat.
- Příklad 3.2
- Příklad 3.3
- Definujte nedeterministické FA, a způsob akceptování NFA.
- Příklad 3.4
- Příklad 3.5
- Upozorněte, že pro minimalizaci, je třeba vyjít z deterministického automatu.

#### 5. cvičení: Ekvivalence FA, regulárních gramatik a regulárních výrazů, $\varepsilon$ -kroky, Kleeneho věta

- Vysvětlete princip odstranění  $\varepsilon$ -kroků
- Příklad 4.7
- Zopakujte vyjadřovací ekvivalenci dosud známých formalismů
- Formulujte podstatu algoritmů pro převod FA na regulární gramatiky a zpět
- Příklad 4.2
- Příklad 4.4
- Připomeňte si definici regulárních výrazů (syntax a sémantika)
- Příklad 4.11
- Princip transformace regulárních výrazů na FA a zpět
- Příklad 4.8 c)
- Příklad 4.10

#### 6. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Příklad 5.1
- Příklad 5.2
- Příklad 5.3a – formulujte formální konstrukci synchronního součinu
- Příklad 5.3b-f – slovní argumentace (hint důkazu) proč ano či ne
- Příklad 5.4
- Příklad 5.5

- Příklad 5.6
- Příklad 5.7 – formální konstrukce
- Příklad 4.12 a) a diskuze k 4.12 b)

## 7. cvičení: Bezkontextové gramatiky a derivační stromy, redukovaná CFG

- Připomeňte CFG a ukažte jak vypadá a jak funguje CFG pro  $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Příklad 6.1
- Příklad 6.2
- Příklad 6.3
- Příklad 6.4
- Příklad 6.5
- Příklad 6.6
- Příklad 6.8
- Příklad 6.9
- Příklad 6.10
- Příklad 6.11 (dle času)
- Příklad 6.7 rozmyslet za DÚ

## 8. cvičení: Normální formy CFG

- Připomeňte princip ostraňování  $\varepsilon$ -pravidel
- Příklad 7.2
- Připomeňte princip ostraňování jednoduchých pravidel
- Příklad 7.5
- Definujte Chomského NF (CNF) a připomeňte postup převodu CFG do CNF
- Příklad 7.6
- Příklad 7.8a)
- Příklad 7.9
- Vysvětlete odstranění přímé levé rekurze na  $A \rightarrow Ab \mid Ac \mid d \mid e$
- Příklad 7.12

## 9. cvičení: Zásobníkové automaty a syntaktická analýza

- Příklad 8.1 (zadejte přechodovou relaci tabulkou  $[q_0Z/a \rightarrow (q_0, AZ)]$ )
- Příklad 8.2
- Příklad 8.3b
- Příklad 8.6
- Příklad 8.8
- Diskutujte ekvivalence způsobu akceptování zás. automatů a podstatu převodu
- Zbude-li čas, cvičte příklady 8.4, 8.5 a 8.7

## 10. cvičení: Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků a pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- Příklad 7.15
- Příklad 9.1
- Příklad 9.2 (není nutné konstruovat celou přechodovou funkci)
- Příklad 9.3
- Příklad 9.4 (formální konstrukce)

## 11. cvičení: Konstrukce Turingových strojů

- Připomeňte jak fungují Turingovy stroje
- Příklad 10.1
- Příklad 10.2
- Příklad 10.3
- Příklad 10.4 – formulujte princip algoritmu pro TS

## 12. cvičení: Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

- Příklad 11.1
- Diskutujte vztah TS akceptuje/rozhoduje a gramatiky typu 0
- Příklad 11.2
- Příklad 11.3
- Příklad 11.4a
- Příklad 11.4b-d pouze myšlenky fungování CFG
- Příklad 11.5
- Příklad 11.6

## 13. cvičení: Redukce

# Zadání cvičení IB102

## 1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte pojmy abeceda, slovo, jazyk apod.
- Připomeňte základní operace nad jazyky a procvičte je s využitím příkladů 1.1 (průnik a sjednocení cvičit netřeba) a 1.2.
- Příklad 1.3 d) e) f) h). U d) vysvětlíte, že neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem.
- Příklad 1.4.
- V sudých skupinách cvičte příklad 1.5, v lichých příklad 1.6.
- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8 b). Zdůrazněte, že dva jazyky jsou stejné, právě když platí obě inkluze  $\subseteq$  a  $\supseteq$ . Jednu inkluzi dokažte.
- Příklad 1.8 c). Pozor, rovnost neplatí.

## 2. cvičení: Gramatiky, deterministické konečné automaty

- Připomeňte pojem gramatiky a cvičte příklad 1.9 a) anebo b).
- Příklad 1.11 a) d).
- Příklad 2.1.
- Příklad 2.2 a) b) c) d). Dejte prosím studentům možnost, aby se pokusili alespoň nějaký automat sestrojít sami. Pozor, automaty musí být deterministické.
- Příklad 2.3 a) b).
- Pokud vám zbyde čas, cvičte příklad 2.5 a zbylé části příkladu 1.11.

## 3. cvičení: Pumping lemma, minimalizace a kanonizace konečných automatů, nedeterministické automaty

- Zopakujte Pumping lemma.
- Příklad 2.6. Z lehčích příkladů a)–c) udělejte jeden pořádně, ostatní zrychleně. Dále udělejte pořádně příklad g) a zrychleně příklad e). Upozorněte studenty, že vlastní text důkazu zůstává v podstatě stejný (důkaz lze prezentovat jako formulář, který se vždy na pár místech doplní).
- Zdůrazněte, že před minimalizací automatu je třeba odstranit nedosažitelné stavy a ztotálnit přechodovou funkci.
- Příklad 3.2 b).

- Budete-li mít pocit, že jeden příklad na minimalizaci nestačil, pokračujte příkladem 3.1 a) a případně 3.3.
- Zopakujte nedeterministické FA.
- Příklad 3.4 a) c) d). Zbude-li čas, udělejte i ostatní části.

#### 4. cvičení: Determinizace, odstranění $\varepsilon$ -kroků, uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Zopakovat determinizaci.
- Příklad 3.5 a) nebo b). Upozorněte, že determinizací může vzniknout stav  $\emptyset$  a jeho následníci se počítají běžným způsobem.
- Zopakovat odstranění  $\varepsilon$ -kroků.
- Příklad 4.5. Příklad řešte pomocí tabulkového zápisu. Chcete-li, můžete nejdříve ukázat, jak snadno se v tom udělá chyba, když se to dělá přímo na grafu.
- Budete-li mít pocit, že příklad 4.5 nestačil, pokračujte příkladem 4.7 (obvykle stačí spočítat jen pár řádků).
- Zopakujte, na které operace jsou regulární jazyky uzavřené. Diskutujte, na které operace je/není uzavřena třída konečných jazyků.
- Příklad 5.8. Tento příklad ukazuje, že konečná změna jazyka (tj. přidání či odebrání konečně mnoha slov) nemá vliv na jeho (ne)regularitu. Toto pozorování lze použít v dalších příkladech, např. v příkladu 5.3.
- Příklad 5.1.
- Dokažte uzavřenost neregulárních jazyků na komplement (včetně formálního důkazu).
- Příklad 5.2.
- Příklad 5.3.
- Příklad 5.4.

#### 5. cvičení: Regulární výrazy, ekvivalence FA, regulárních výrazů a gramatik

- Příklad 5.5.
- Příklad 5.6.
- Příklad 4.8. Stačí 2 odrážky.
- Příklad 4.9.
- Příklad 4.10.
- Příklad 4.11.
- Příklad 4.2.
- Příklad 4.4.

## 6. cvičení: Bezkontextové gramatiky, derivační stromy, jednoznačnost, redukované gramatiky

- Příklad 6.11 a).
- Příklad 6.1. U druhé gramatiky neztrácejte moc času, příklad slouží jen jako demonstrace popisné síly bezkontextových gramatik.
- Příklad 6.2.
- Příklad 6.3.
- Příklad 6.5.
- Příklad 6.6. Není třeba formálně dokazovat, že je navržená gramatika jednoznačná. Slovní argumentace postačí.
- Příklad 6.7. Stačí identifikovat problém.
- Příklad 6.8. Připomeňte, že nejdříve je třeba odstranit nenormované symboly a až pak ty nedosažitelné. Opačné pořadí může vyústit v neredukovanou gramatiku, což lze ukázat i na příkladu 6.8.
- Zbyde-li čas, dělejte další odrážky z příkladu 6.11.

## 7. cvičení: Transformace bezkontextových gramatik

- Příklad 7.2.
- Příklad 7.5.
- Příklad 7.6.
- Příklad 7.8 a). Pokud stiháte, udělejte i část b).
- Připomeňte odstranění přímé levé rekurze na pravidlech  $A \rightarrow Ab \mid Ac \mid dA \mid e$ .
- Příklad 7.12. Cvičte pouze odstranění levé rekurze (transformaci do GNF v IB102 neučíme). Pokud by jeden příklad nestačil, udělejte ještě příklad 7.13 nebo 7.10.

## 8. cvičení: Pumping lemma pro bezkontextové jazyky, zásobníkové automaty

- Příklad 7.15. Jednu odrážku udělejte pečlivě, v dalších se soustřed'te jen na to podstatné.
- Příklad 8.1. Zmíňte prosím, že byl definován pojem *krok výpočtu*, ale pojem *výpočet* pro PDA definován nebyl. Lze si představit hned několik definic, které kromě zjevných požadavků splňují i tyto:
  1. Musí se přečíst celý vstup. V tom případě by v příkladu existoval jen 1 výpočet.
  2. Musí se číst "dokud to lze". V tomto případě existují 4 výpočty.
  3. Stačí přečíst libovolnou část vstupu. V tom případě je výpočtů hodně.
- Příklad 8.3. Udělejte pořádně aspoň dvě odrážky včetně c). Zbude-li čas, cvičte další odrážky.



## 9. cvičení: Nedeterministická syntaktická analýza, uzávěrové vlastnosti bezkontextových, rekursivních a rekursivně spočetných jazyků

- Příklad 8.6. Ukažte, jak lze konstrukci analyzátoru shora dolů použít u příkladů na konstrukci PDA: nejdříve se zkonstruuje CFG a z ní pak lehce PDA. Velmi elegantně tak lze řešit třeba příklad 8.3 c).
- Příklad 9.1.
- Příklad 9.3.
- Příklad 11.3 a) d) e) f) g).
- Zbude-li čas, řešte příklad 11.4.

## 10. cvičení: Konstrukce TM, redukce a rozhodnutelnost problémů

- Příklad 10.1.
- Příklad 10.2.
- Příklad 12.1.

## 11. cvičení: Redukce a rozhodnutelnost problémů, P a NP

- Příklad 12.2.
- S využitím příkladu 12.3 připomeňte definici Postova korespondenčního problému.
- Příklad 12.4.
- Příklad 12.5.
- Příklad 13.3.
- Příklad 13.4.

## 12. cvičení: Složitostní třídy, NP-úplné problémy

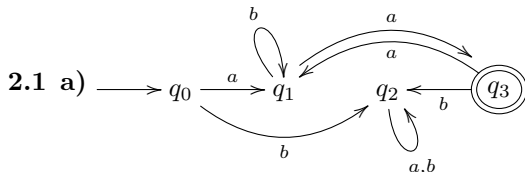
- Zopakujte pojem *konjunktivní normální forma (cnf-forma)* formulí, pojem *3cnf-forma* a problém *3SAT*. Ke zopakování můžete využít část příkladu 13.5.
- Příklad 13.6 b) c).
- Příklad 13.7.
- Zbude-li čas, udělejte i příklady 13.6 a) a 13.8.

## Řešení některých příkladů

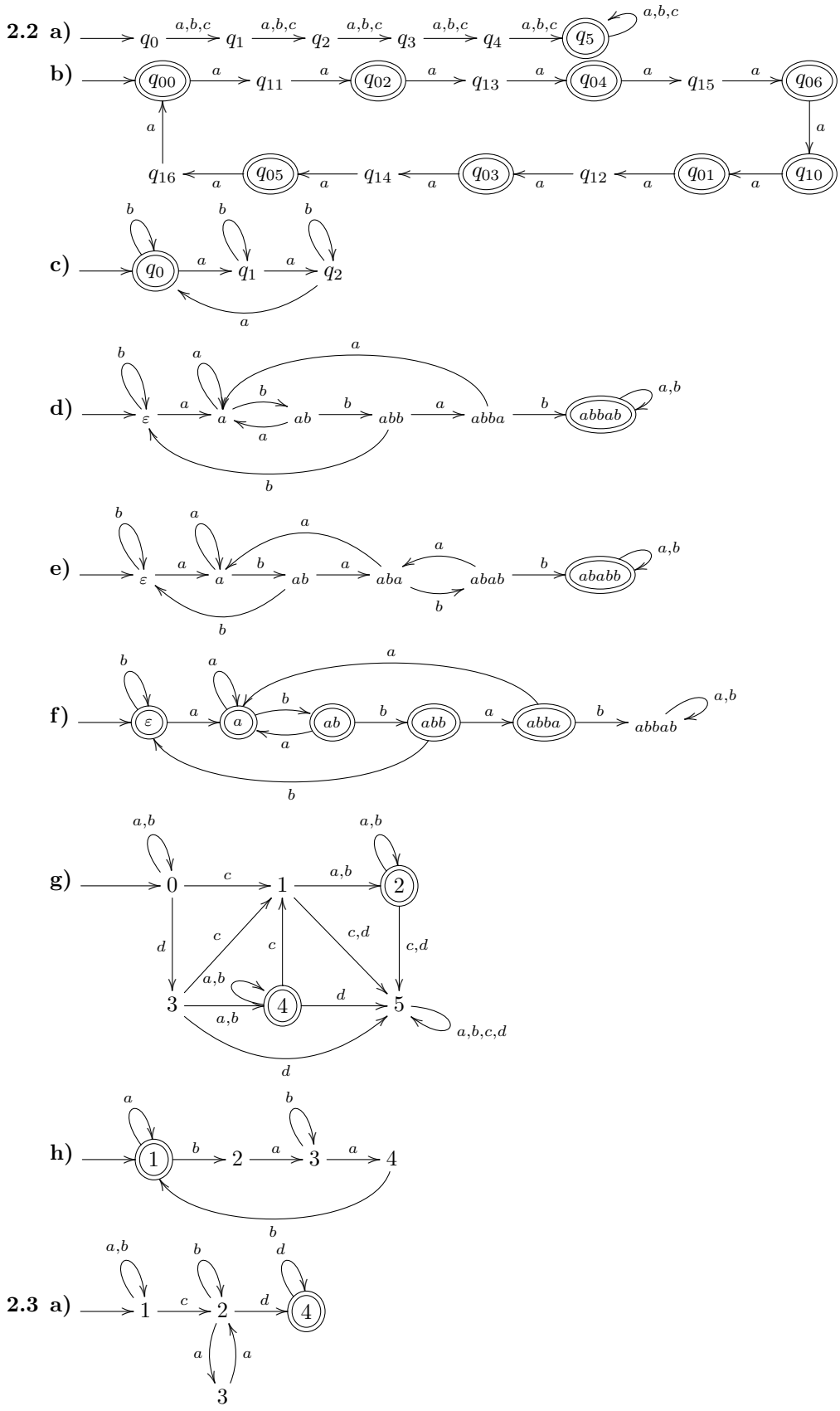
# Formální jazyky, regulární gramatiky

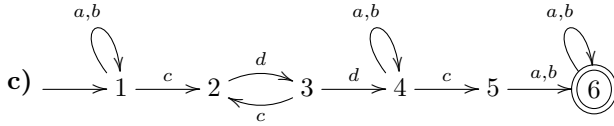
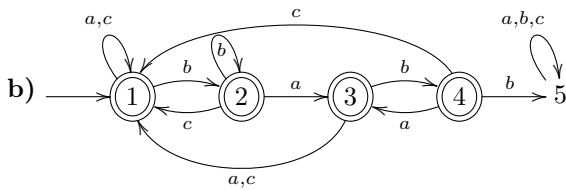
- 1.1 a)**  $\{xy, y, yx, z\}$  **b)**  $\{y\}$  **c)**  $\{xyy, xyz, yy, yz, yxy, yxz\}, \{yxy, yy, yyx, zxy, zy, zyx\}$   
**d)**  $\{\varepsilon\}, \{y, z\}, \{yy, yz, zy, zz\}, \{yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz\},$   
 $\{\varepsilon, y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \dots\}$  tj. libovolné slovo z písmenek  $y$  a  $z$  včetně  $\varepsilon$ ,  
 $\{y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \dots\}$  tj. libovolné slovo z písmenek  $y$  a  $z$  kromě  $\varepsilon$   
**e)**  $\{x, y, z\}^* \setminus \{y, z\}$  tj. libovolné slovo složené z písmenek  $x, y$  a  $z$  včetně  $\varepsilon$ , kromě slov  $y$  a  $z$
- 1.2 a)**  $\{\varepsilon\}, \emptyset, \{\varepsilon\}, \{\varepsilon\}$  **b)**  $\{\varepsilon\}, \emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\}$  pokud  $\varepsilon \in L$  jinak  $\emptyset$  **c)**  $\emptyset, \emptyset, \{\varepsilon\}, L$
- 1.3 a)**  $\{a, aa, ba, abc, \varepsilon\}$  **b)**  $\{a, ba\}$  **c)**  $\{aba, aabc, aa, a, aaba, aaabc, aaa, baba, baabc, baa, ba\}$  **d)** ne, protipříklad  $aabc \in L_1 \cdot L_2 \setminus L_2 \cdot L_1$  **e)** jedno slovo z množiny  $\{a, aa, ba, aba, aaa, baba, baa\}$  **f)** ano, protože  $\varepsilon \in L_2$ ; ne, protipříklad  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$ ; pro pokročilé: implikace " $\implies$ " platí, implikace " $\impliedby$ " platí pouze v upravené podobě  $\varepsilon \in L_2 \impliedby (L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset)$  **g)** ano, ano, ne **h)** všechna slova nad danou abecedou, kromě slov z jazyka  $L_2$ , formálně:  $\{a, b, c, d\}^* \setminus L_2$
- 1.4 a)** Neplatí. Protipříklad:  $L = \{aa, bb\}, i = 2, L^i = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}, \{w^i \mid w \in L\} = \{aaaa, bbbb\}$   
**b)** Neplatí. Protipříklad:  $L = \{aa\}, L^2 = \{aaaa\}$ , ale  $|aaaa| \neq 2$  **c)**  $L = \{a\}$
- 1.5**  $L_1 = L_4 = L_5 \supseteq L_2, L_1 = L_4 = L_5 \supseteq L_3, L_1 = L_4 = L_5 \supseteq L_6$ , neporovnatelné:  $L_2, L_3, L_6$   
 $L_1$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$   
 $L_2$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$  tvaru  $xyzxyzyz \dots xyz$   
 $L_3$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ , ve kterých jsou všechna  $x$  před všemi  $y$  a  $z$  a všechna  $y$  před všemi  $z$   
 $L_4$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ ; protože  $\{x, y, z\} \subseteq \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$   
 $L_5$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ ; protože  $\{x, y, z\} \subseteq \{x, y\}^* \cup \{z\}^*$   
 $L_6$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ , která obsahují alespoň jeden výskyt  $x$
- 1.6**  $L_1 = L_5 \supseteq L_2 \supseteq L_6, L_1 = L_5 \supseteq L_3 \supseteq L_4, L_2 \supseteq L_4$ , neporovnatelné:  $L_2$  a  $L_3, L_6$  a  $L_3, L_6$  a  $L_4$   
 $L_1$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$   
 $L_2$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ , kromě  $\varepsilon$   
 $L_3$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ , ve kterých jsou všechna  $x$  před všemi  $y$  a  $z$  a všechna  $y$  před všemi  $z$   
 $L_4$  – ty slova z  $L_3$ , která mají právě 2 výskyty  $y$   
 $L_5$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ ; protože  $\{x, y, z\} \subseteq \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$   
 $L_6$  – všechna slova nad  $\{x, y, z\}$ , která obsahují alespoň jeden výskyt  $x$
- 1.7 a)**  $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$  **b)**  $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cdot \mathbf{c)}$   
 $L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$  **d)**  $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cup L_2 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$  a pokud naznáme, že  $\varepsilon$  také začíná a končí stejným znakem, je třeba k řešení přidat  $\cup (L_1^* \cap L_2^*)$  **e)**  $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$   
**f)**  $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cap L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$  **g)**  $((L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*)^C$
- 1.8 a)** ne,  $L_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{b\}$  **b)** ano, nutno dokázat obě inkluze  $\subseteq$  a  $\supseteq$  **c)** ne,  $L_1 = \{a\}, L_2 = \{ab\}$  a  $L_3 = \{b, \varepsilon\}$  **d)** ne,  $L_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{b\}$  **e)** ne,  $L_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{b\}$  **f)** ano, nutno dokázat obě inkluze  $\subseteq$  a  $\supseteq$  **g)** ne,  $L_1 = \{a\}$  a  $L_2 = \{b\}$
- 1.9 a)**  $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ , typu 0 **b)**  $\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b, c\}^+$ , typu 3 (regulární)
- 1.10**  $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 2j; j, k \in \mathbb{N}_0\}$ , dolní indexy u navržených neterminálů představují zbytek po dělení počtu 'a' (resp. 'b') dvěma

## Deterministické konečné automaty, pumping lemma



- b)**  $L = \{a\} \cdot \{b, aa\}^* \cdot \{a\}$  **c)**  $L = (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{aa\})^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cup \{ab\} \cdot \{a, b\}^*)) \cup \{b\} \cdot \{a, b\}^*$



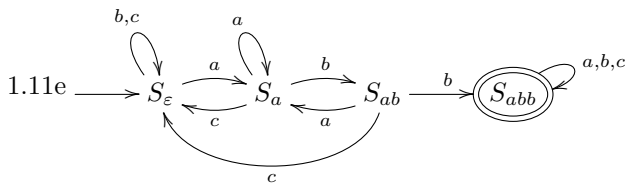
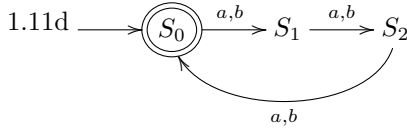
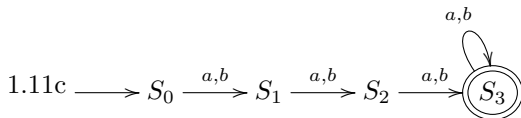
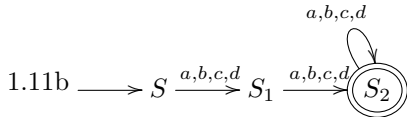
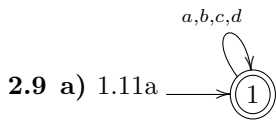


2.4  $L = \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot (\{c\} \cdot \{d\})^* \cup \{b\}$

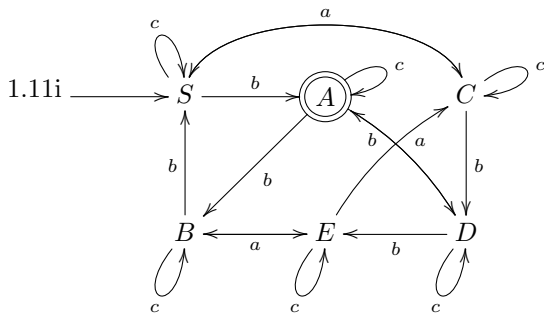
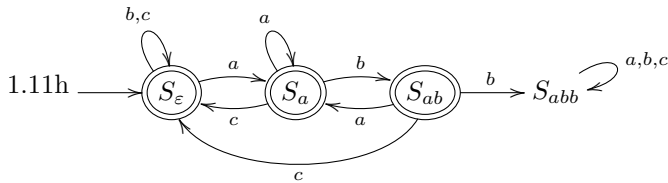
2.5  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \wedge w = u.v \Rightarrow |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 3\}$

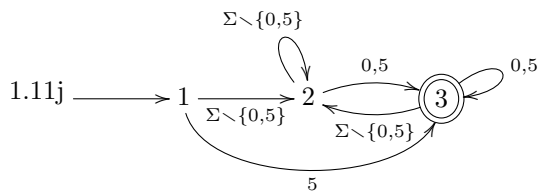
2.6 U příkladu e) je třeba volit slovo  $a^n b^{n!+n}$ .

2.7 Příklad a) je regulární, b) není, jako slovo lze zvolit například  $a^n c b^{n+1}$ .



1.11f Není regulární.





## Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

3.1 a)

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ A	B	C
B	D	B
C	C	D
← D	C	B

b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
↔ A	B	C
B	B	C
C	C	D
← D	D	C

3.2 a)

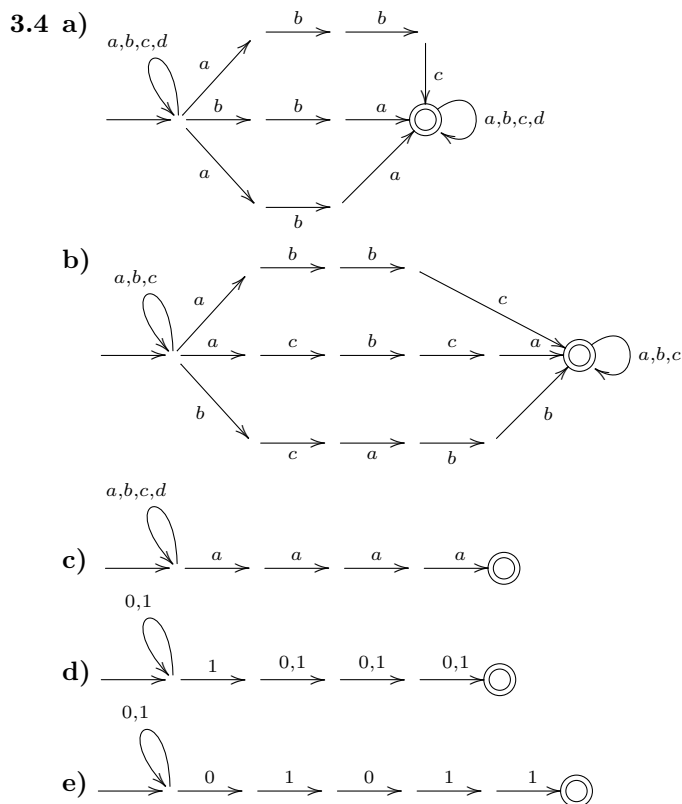
	<i>a</i>	<i>b</i>
→ A	B	C
B	C	A
C	C	D
D	C	E
← E	F	E
F	D	F

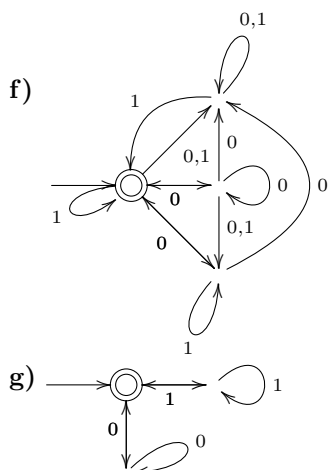
b)

	<i>a</i>	<i>b</i>
→ A	B	C
B	D	B
← C	B	C
← D	E	B
E	F	C
F	F	F

Výsledné automaty v obou případech nejsou ekvivalentní automatům uvedeným v zadání vpravo.

3.3 Není.





3.5 a)

		$a$	$b$	$c$
$\rightarrow$	[1]	[23]	[34]	[1]
$\leftarrow$	[23]	[123]	[14]	[234]
	[34]	[123]	[1]	[34]
$\leftarrow$	[123]	[123]	[134]	[1234]
	[14]	[123]	[134]	[134]
$\leftarrow$	[234]	[123]	[14]	[234]
	[134]	[123]	[134]	[134]
$\leftarrow$	[1234]	[123]	[134]	[1234]

b)

		$a$	$b$	$c$
$\rightarrow$	[1]	[12]	[1]	$\emptyset$
$\leftarrow$	[12]	[12]	[13]	[1]
	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	
	[13]	[12]	[1]	[14]
	[14]	[125]	[1]	$\emptyset$
$\leftarrow$	[125]	[12]	[136]	[1]
	[136]	[127]	[1]	[14]
$\leftarrow$	[127]	[12]	[13]	[1]

3.6  $(\{a, b\} \cdot \{b\} \cup \{a, b\} \cdot \{b\} \cdot \{a, b\})^* \cdot \{a, b\} \cdot \{b\}$

3.8 a) Předpokládejme, že takový automat existuje. Pak ze slov  $a^0, a^1, a^2, a^3, a^4$  musejí dvě nutně padnout do stejné třídy rozkladu  $\Sigma^* / \sim_L$ . Označme je  $a^i, a^j$  ( $i \neq j$ ) a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že  $i < j$ . Pak platí

$$a^i \cdot a^{4-j} = a^{4+i-j} \notin L$$

$$a^j \cdot a^{4-j} = a^4 \in L,$$

a tedy  $a^i \not\sim_L a^j \Rightarrow |\sim_L| \geq 5$ .

b) Analogicky jako v a).

3.10 a) Důkaz sporem. Předpokládejme, že  $L$  je regulární. Pak prefixová ekvivalence  $\sim_L$  má konečný index, označme jej  $n$ . Pak ovšem ze slov  $a, a^2, a^4, \dots, a^{2^n}$  nutně musí některá dvě slova padnout do stejné třídy rozkladu, označme je  $a^k, a^l$  ( $k \neq l$ ). Po přiřetení slova  $a^k$  dostáváme slovo  $a^k a^k \in L$  a slovo  $a^l a^k \notin L$ . Tím je dosažen spor s předpokladem a  $L$  není regulární.

b)  $\varepsilon, a, a^2, \dots, a^n$  z čehož  $a^k, a^l$  (BÚNO  $k < l$ ), která  $a^k b^k \in L, a^l b^k \notin L$

c)  $abb, a^2 bb, \dots, a^{n+1} bb$  z čehož  $a^k bb, a^l bb$  ( $k \neq l$ ), která  $a^k b b a^k \in L, a^l b b a^k \notin L$

d)  $\varepsilon, a, a^2, \dots, a^n$  z čehož  $a^k, a^l$  (BÚNO  $k < l$ ), která  $a^k b^k \notin L, a^l b^k \in L$

3.11 Definujeme binární relaci  $\sim$  takto:  $u \sim v \iff \#_a(u) \equiv \#_a(v) \pmod{3}$

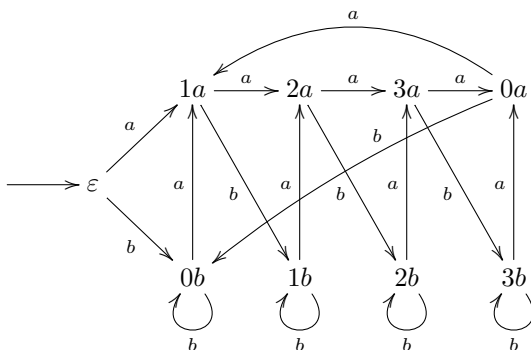
$\sim$  je ekvivalence,  $\sim$  je pravá kongruence,  $|\sim| = 3$ , tedy má konečný index,  $L = \{w \mid \#_a(w) \pmod{3} = 0\}$

3.12 a) 4 b) nemá konečný index

3.13 a)  $\sim$  je ekvivalence i pravá kongruence, index je 4.  $L$  může být libovolný jazyk, jehož minimální automat odpovídá přímo relaci  $\sim$ . Takových jazyků je 12, což je vidět po nakreslení automatu (bez akceptujících stavů) podle  $\sim$  a zvažení, pro které označení koncových stavů je automat minimální. Jazyky  $L'$  jsou právě ty, které lze popsat stejným automatem, ale s takovou množinou koncových stavů, při které automat není minimální. Např.  $L' = \{a, b\}^*$ .

b)  $\sim$  není ekvivalence (není tranzitivní).

c)  $\sim$  je ekvivalence i pravá kongruence, index je 9. Lze podle ní sestavit tento automat:



Je vidět, že automat nebude při žádném označení koncových stavů minimální: stavy  $\varepsilon, 0a, 0b$  mají stejné přechody a vždy budou alespoň dva z nich označeny jako akceptující nebo neakceptující a tudíž ty dva stavy budou jazykově ekvivalentní. Naopak  $L'$  může být jakýkoliv jazyk rozpoznávaný uvedeným automatem s libovolným označením koncových stavů. Takových jazyků  $L'$  je tedy celkem  $2^9$ .

## Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, $\varepsilon$ -kroky, Kleeneho věta

4.1

	$a$	$b$	$c$
$\leftrightarrow \bar{S}$	$\{\bar{A}, q_f\}$	$\{\bar{C}\}$	$\emptyset$
$\bar{A}$	$\{\bar{A}\}$	$\{\bar{B}, q_f\}$	$\{q_f\}$
$\bar{B}$	$\{\bar{B}, \bar{C}\}$	$\{\bar{C}\}$	$\{\bar{A}, q_f\}$
$\bar{C}$	$\{\bar{A}, q_f\}$	$\{\bar{B}, q_f\}$	$\emptyset$
$\leftarrow q_f$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

4.2

	$a$	$b$	$c$
$\rightarrow \bar{S}$	$\{\bar{X}\}$	$\{\bar{Y}\}$	$\{q_f\}$
$\bar{X}$	$\emptyset$	$\{\bar{S}, \bar{X}\}$	$\emptyset$
$\bar{Y}$	$\emptyset$	$\{\bar{S}\}$	$\{\bar{Z}\}$
$\bar{Z}$	$\{\bar{S}\}$	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$
$\leftarrow q_f$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

4.5

	$a$	$b$	$c$	$d$
$\leftrightarrow 0$	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3, 4\}$
1	$\{0, 1, 2, 3, 4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3, 4\}$
$\leftarrow 2$	$\{3, 4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	$\emptyset$

4.7

	$a$	$b$	$c$
$\rightarrow 1$	$\{1, 2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$\emptyset$
2	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{2, 6\}$	$\emptyset$
4	$\{1, 2, 5, 6\}$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$
5	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$
$\leftarrow 6$	$\{2, 5, 6\}$	$\{2, 3, 5, 6\}$	$\{2, 3, 6\}$

4.11 **a)**  $(a+b)^*ab$  **b)**  $b^*(ab^*ab^*)^*$  **c)**  $a(a+b)^*a+b(a+b)^*b+a+b$  (pokud  $\varepsilon$  také začíná a končí na stejným symbolem, přičteme ještě  $\varepsilon$ ) **d)**  $((a+b)(a+b))^*$

4.12 **a)**  $M_1$  je třída všech konečných jazyků.



b) Necht'  $\Sigma_1$  je nějaká abeceda. Pak  $C(\Sigma_1)$  definujeme jako množinu všech slov, kde se každé písmeno z abecedy vyskytuje aspoň jednou, tj.

$$C(\Sigma') = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall a \in \Sigma_1 : \#_a(w) > 0\}.$$

Pak  $M_2$  je třída všech jazyků  $L$  takových, že pro všechny  $\Sigma_1$ , které jsou podmnožinou abecedy jazyka  $L$ , platí:  $L \cap C(\Sigma_1)$  je konečný nebo  $C(\Sigma_1) \setminus L$  je konečný.

Poměrně snadno se ukáže, že  $M_2$  všechny takové jazyky musí obsahovat a že je tato třída zároveň uzavřená na sjednocení, průnik a komplement.

c)  $M_3$  je třída všech konečných jazyků.

## Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

5.1 Neplatí. Jazyky  $L_i = \{a^i b^i\}$  pro každé  $i > 0$  jsou konečné a tudíž regulární, ale  $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^n b^n \mid n > 0\}$  není regulární.

5.2  $L_i = \{a, b\}^* \setminus \{a^i b^i\}$  pro každé  $i > 0$ . Pak  $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \{a, b\}^* \setminus \{a^n b^n \mid n > 0\}$ , což není regulární jazyk, protože  $\{a^n b^n \mid n > 0\}$  není regulární jazyk a regulární jazyky jsou uzavřené na doplněk.

5.3 Neregulární jazyky jsou uzavřené na komplement. U všech ostatních operací lze najít jazyky takové, že výsledkem je neregulární jazyk, i takové, že výsledek je regulární. Necht'  $R = \{a^n b^n \mid n > 0\}$  je jazyk nad  $\Sigma = \{a, b\}$ .  $R$  jistě není regulární.

operace	regulární výsledek	neregulární výsledek
$L_1 \cap L_2$	$R \cap co-R = \emptyset$	$R \cap R = R$
$L_1 \cup L_2$	$R \cup co-R = \Sigma^*$	$R \cup R = R$
$L_1 \setminus L_2$	$R \setminus R = \emptyset$	$R \setminus co-R = R$
$L_1 \cdot L_2$	$(R \cup \{\varepsilon\}) \cdot co-R = \Sigma^*$	$R \cdot R$
$L_1^*$	$(co-R)^* = \Sigma^*$	$R^*$

5.4 Platí.

5.5 Ani jedna implikace neplatí.

5.6 Stačí zvolit  $L_1$  jako libovolný neregulární jazyk a  $L_2$  jako doplněk  $L_1$ .

## Bezkontextové gramatiky

6.1 a)  $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$  b) Jazyk se nedá moc rozumně popsat.

6.4 Ano, každý regulární jazyk je jednoznačný CFL.

6.7 Nelze. Průnik podmínek (slova s nejednoznačným odvozením) nelze popsat bezkontextovou gramatikou (nelze formulovat podmínky disjunktně tak, aby šly popsat pomocí pravidel bezkontextových gramatik).

## Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.9 Minimální i maximální délka odvození je  $2n - 1$ .

## Zásobníkové automaty

8.2 a)  $\{a^i b^j \mid i > j > 0\}$

## Uzávěrové vlastnosti CFL

9.3 a) ano b) ne c) ano d) třída bezkontextových jazyků bez vlastnosti sebevlození se rovná třídě regulárních jazyků

## Konstrukce Turingových strojů

10.2 Návod: TS bude donekonečna číst vstupní pásku a posouvat se vpravo, nebo bude ve dvou krocích opakovaně posouvat hlavu vlevo a vpravo.

## Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

**11.3 a)** Neplatí. Stačí vzít libovolný neregulární rekurzivně spočetný  $L$  nad abecedou  $\Sigma$  a  $R = \Sigma^*$ . **b)** Platí (viz. skripta). **c)** Platí (viz. skripta). **d)** Platí. **e)** Platí. **f)** Neplatí. Stačí vzít  $R \supseteq L$ . **g)** Platí. Plyne z uzavřenosti rekurzivních jazyků na sjednocení.

**11.4 a) b) c)** Kontextová gramatika:  $G = (\{S', S, B, \boxplus\}, \{a, b, c\}, P, S')$ , kde množina pravidel  $P$  obsahuje následující pravidla.

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \mid \varepsilon \mid abc, \\ S &\rightarrow aBSc \mid a\boxplus c, \\ Ba &\rightarrow aB, \\ B\boxplus &\rightarrow \boxplus b \mid bb \end{aligned}$$

**11.6**  $L = \{w \mid w \text{ je kód dvojice } (A, v) \text{ takové, že TS } A \text{ nezastaví svůj výpočet nad slovem } w\}$

## Redukce

**12.1 a)** Platí (přímo z definičního vztahu). **b)** Neplatí.  $A = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ ,  $B = \{0\}$ ,  $f(x) = 0$  pokud  $x$  je tvaru  $ww$ ,  $f(x) = 1$  jinak. **c)** Platí. **d)** Platí (připomeňme, že  $A \leq_m B$  implikuje  $co-A \leq_m co-B$ ). **e)** Neplatí.  $A = \emptyset$ ,  $B$  je problém zastavení.  $f(x) = y$ , kde  $y$  je libovolné slovo nad  $\{0, 1, \#\}$ , které neleží v  $B$ . **f)** Platí.  $f(w) = \langle M', w \rangle$ , kde  $M'$  je TM akceptující  $A$  takový, že místo do zamítajícího stavu začne cyklit. Tedy  $M'$  akceptuje  $w$  právě když zastaví. Funkce  $f(w) = \langle M, w \rangle$ , kde  $M$  je libovolný zvolený TM akceptující  $A$  naopak redukcí být nemusí (např. pokud je  $A$  rekurzivní a  $M$  je úplný).

**12.2**  $A$  není rekurzivní, protože na něj lze redukovat problém zastavení.  $A$  je rekurzivně spočetný (lze ukázat přímo nebo redukcí na problém akceptování).  $co-A$  není rekurzivně spočetný ( $A$  by pak byl rekurzivní).

**12.3** Řešením je posloupnost 2, 2, 4, 3, 3, 1, 1.

**12.4** Lze ukázat redukcí běžného PCP na problém ze zadání.

**12.5** Lze ukázat redukcí  $co-NONEMPTY$  na  $EQ$ .  $NONEMPTY = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je TM a } L(M) \neq \emptyset\}$  je problém neprázdnoty, který je nerozhodnutelný a tudíž i jeho doplněk je nerozhodnutelný.

## Složitost

**13.1** Postupujeme podle definice  $\mathcal{O}$ . Bud' najdeme konstanty  $n_0$  a  $c$  tak, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí definiční nerovnost, nebo ukážeme (většinou sporem), že takové konstanty neexistují. **a)** Volíme například  $n_0 = 1$ ,  $c = 3$ . Pro všechna  $n \geq n_0$  platí  $2n \leq 3n = cn$  a proto  $2n \in \mathcal{O}(n)$ . **b)** Předpokládejme, že existují  $n_0$  a  $c$  takové, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí  $n^2 \leq cn$ . Položme  $m = \max\{c, n_0\} + 1$ . Zjevně  $m \geq n_0$ , ale  $m^2 > cm$ . To je spor a proto  $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$ . **c)** Platí. **d)** Neplatí. **e)** Nejprve připomeňme definici. Píšeme  $f(n) \in 2^{\mathcal{O}(g(n))}$ , pokud existují  $n_0, c \in \mathbb{N}$  takové, že pro všechna  $n \geq n_0$  platí  $f(n) \leq 2^{c \cdot g(n)}$ . Analogicky se definuje i význam dalších aritmetických výrazů obsahujících  $\mathcal{O}(g(n))$ , jako například  $2^{2^{\mathcal{O}(g(n))}}$ .

Vztah  $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$  samozřejmě platí. Stačí zvolit  $n_0 = 1$  a  $c = 2$ . **f)** Platí. Stačí zvolit  $c = 4$  a dopočítat dostatečně velké  $n_0$ . **g)** Neplatí. V důkazu sporem stačí zvolit  $m = \max\{1, c, n_0\}$ .

**13.2** Tento vztah obecně neplatí. Protipříkladem jsou například funkce  $f(n) = 1$  a

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ n & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zjevně  $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$ , protože funkce  $g$  není shora omezená a tudíž pro každé  $n_0, c \in \mathbb{N}$  existuje  $n > n_0$  splňující  $g(n) > c \cdot f(n) = c$ . Vztah  $f(n) \in o(g(n))$  ovšem neplatí, protože funkce  $\frac{f(n)}{g(n)}$  nemá pro  $n$  jdoucí do nekonečna limitu.

**13.3** Necht'  $M_A, M_B$  jsou jednopáskové deterministické Turingovy stroje pracující s časovou složitostí  $\mathcal{O}(p_A), \mathcal{O}(p_B)$  (kde  $p_A$  a  $p_B$  jsou polynomy), které akceptují jazyky  $A, B$ . Nejprve ukážeme, že třída  $P$  je uzavřená na všechny tři operace.

Popíšeme dvoupáskový deterministický Turingův stroj  $M$  akceptující jazyk  $A \cup B$ . Stroj  $M$  pro vstup  $x$  nejprve zkopíruje vstup na druhou pásku (v čase  $\mathcal{O}(n)$ ), pak na druhé pásce simuluje výpočet stroje  $M_A$ .

Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje  $M_A$ , pak i stroj  $M$  akceptuje. V opačném případě stroj  $M$  simuluje na první pásce výpočet stroje  $M_B$ . Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje  $M_B$ , pak i stroj  $M$  akceptuje, jinak zamítá. Je zřejmé, že stroj  $M$  akceptuje jazyk  $A \cup B$  a že pracuje v čase  $\mathcal{O}(n + p_A(n) + p_B(n))$ , tedy v polynomiálním čase.

Stroj akceptující komplement jazyka  $A$  získáme ze stroje  $M_A$  záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu. Takto získaný stroj pracuje se stejnou časovou složitostí jako  $M_A$ .

Popíšeme třípáskový Turingův stroj  $M$  akceptující jazyk  $A.B$ . Stroj postupně zkouší rozdělit vstupní slovo  $x = x_1x_2 \dots x_n$  na všechny možné dvojice podslov (nejprve  $\varepsilon$  a  $x$ , pak  $x_1$  a  $x_2 \dots x_n$ , pak  $x_1x_2$  a  $x_3 \dots x_n, \dots$ , nakonec  $x$  a  $\varepsilon$ ). První podslovo vždy zkopíruje na druhou pásku a simuluje na něm výpočet stroje  $M_A$ . Druhé podslovo zkopíruje na třetí pásku a simuluje na něm výpočet stroje  $M_B$ . Pokud obě simulace dospějí do akceptujícího stavu, stroj  $M$  akceptuje. V opačné situaci postup opakujeme pro další dvojici podslov. Pokud už byly vyzkoušeny všechny dvojice, stroj  $M$  zamítne. Stroj  $M$  pracuje v čase  $\mathcal{O}(n \cdot (n + p_A(n) + p_B(n)))$ , tedy v polynomiálním čase.

Třída NP je uzavřená na sjednocení i na zřetězení. V obou případech lze použít stejnou argumentaci jako u třídy P. V případě zřetězení lze algoritmus stroje  $M$  vylepšit tak, že neprochází všechny dvojice podslov, ale nedeterministicky uhodne správné rozdělení na podslova.

Uzavřenost třídy NP na komplement je otevřený problém (známý jako NP = coNP?). Výše uvedená argumentace pro P v tomto případě nefunguje: záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu u nedeterministického stroje získáme stroj, který akceptuje slovo  $w$  pokud existuje zamítající výpočet původního stroje nad tímto slovem. Žádoucí by ovšem bylo, aby zkonstruovaný stroj akceptoval slovo  $w$  pokud jsou *všechny* výpočty původního stroje nad tímto slovem zamítající.

**13.4 a)** Neplatí. Stačí uvážit libovolný jazyk  $L \in P \subseteq NP$ . Jelikož třída P je uzavřená na doplněk, tak i  $co-L \in P \subseteq NP$ . Tedy  $co-L \notin co-NP$ , ale přitom  $co-L \in coNP$ . **b)** Platí. Jelikož  $co-L_1, co-L_2 \in NP$  a NP je uzavřené na sjednocení, tak  $co-L_1 \cup co-L_2 \in NP$ . Tedy  $L_1 \cap L_2 \in coNP$ . **c)** Platí. Jelikož  $co-L_2 \in NP$  a NP je uzavřené na průnik (lze lehce dokázat), tak  $L_1 \cap co-L_2 = L_1 \setminus L_2 \in NP$ .

**13.6** Příslušnost do NP lze dokázat snadno. NP-těžkost lze dokázat redukcí: **a)** z problému  $3SAT$  (viz Sipser: Theorem 7.35 v 1. vydání, Theorem 7.46 ve 3. vydání) **b)** z problému  $3SAT$  (viz Sipser: Theorem 7.26 v 1. vydání, Theorem 7.32 ve 3. vydání) **c)** z problému  $CLIQUE$ . pro danou instanci  $\langle G, k \rangle$  problému  $CLIQUE$  lze v polynomiálním čase vytvořit dvojici  $\langle H_k, G \rangle$ , kde  $H_k$  je úplný graf s  $k$  vrcholy. Je zřejmé, že  $\langle G, k \rangle \in CLIQUE$  právě tehdy, když  $\langle H_k, G \rangle \in SGI$ .

Abychom se ujistili, že redukce  $CLIQUE \leq_p SGI$  je polynomiální i při binárním zakódování  $k$ , můžeme ji vylepšit tak, že nejprve ověříme, zda graf  $G$  má alespoň  $k$  vrcholů. V případě kladné odpovědi pokračujeme jako v předchozím případě (dvojici  $\langle H_k, G \rangle$  lze jistě zkonstruovat v čase kvadratickém vzhledem k počtu vrcholů grafu  $G$ ). V opačném případě jistě platí, že  $\langle G, k \rangle \notin CLIQUE$  a tudíž stačí vygenerovat libovolnou dvojici grafů, která nepatří do  $SGI$  (například  $\langle H, G' \rangle$ , kde  $H$  je graf s jedním vrcholem  $v$  a hranou  $(v, v)$  a  $G'$  je graf s jedním vrcholem, ale bez hrany).

**13.7 a)**  $TIME(n^2) \subseteq TIME(n^3)$  (ve skutečnosti lze dokázat i  $TIME(n^2) \subsetneq TIME(n^3)$ ) **b)**  $SPACE(2n^2) = SPACE(100n^2)$  **c)**  $SPACE(n^2) \supseteq TIME(n^2)$  **d)**  $NSPACE(n^2) \subseteq SPACE(n^5)$  (ve skutečnosti lze dokázat i  $NSPACE(n^2) \subsetneq SPACE(n^5)$ ) **e)**  $P \subseteq TIME(2^n)$ , protože  $n^k \in \mathcal{O}(2^n)$  pro každé  $k$

**13.8** viz Sipser, za Definition 7.7.