Konečné automaty

Definice. **Deterministický konečný automat** (Deterministic Finite Automaton, DFA) $\mathcal{M}$ je pětice $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde

- Q je neprázdná konečná množina **stavů**,
- Σ je konečná **vstupní abeceda**,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ je parciální **přechodová funkce**,
- $q_0 \in Q$ je **počáteční (iniciální) stav**,
- $F \subseteq Q$ je množina **koncových (akceptujících) stavů**.

Příklad a zápis tabulkou

Zápis grafem

Výpočet konečného automatu

Rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$ je parciální funkce definovaná induktivně vzhledem k délce slova ze Σ^*:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = q$ pro každý stav $q \in Q$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \begin{cases} \delta(\hat{\delta}(q, w), a) & \text{je-li } \hat{\delta}(q, w) \text{ i } \delta(\hat{\delta}(q, w), a) \text{ definováno} \\ \perp & \text{jinak} \end{cases}$

Slovo w je **akceptováno** automatem $\mathcal{M}$ právě když $\hat{\delta}(q_0, w) \in F$.

Slovo w je **zamítáno** automatem $\mathcal{M}$ právě když $\hat{\delta}(q_0, w) \notin F$.

Jazyk **přijímaný** (**akceptovaný**, **rozpoznávaný**) automatem $\mathcal{M}$ je

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \in F\}.$$

Jazyk, který je rozpoznatelný (nějakým) deterministickým konečným automatem, nazveme **regulární**.

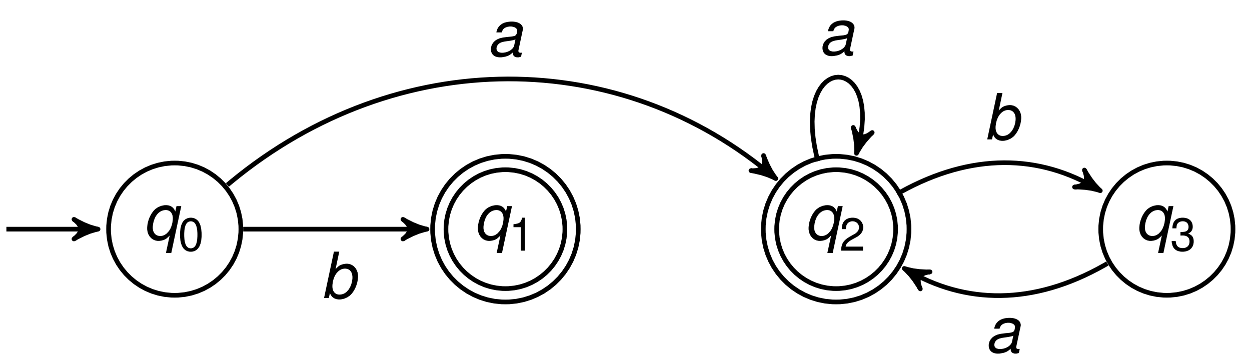
Automaty $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ nazveme **ekvivalentní**, právě když $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$.

Parcialita přechodové funkce

Přechodová funkce δ byla zavedena jako parciální. Parcialita přechodové funkce nemá podstatný vliv na výpočetní sílu konečných automatů.

Lemma. Ke každému DFA $\mathcal{M}$ existuje ekvivalentní DFA $\mathcal{M}'$ s totální přechodovou funkcí.

Idea důkazu:



Důkaz. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Pak $\mathcal{M}'$ definujeme předpisem $\mathcal{M}' = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', q_0, F)$, kde $p \notin Q$ a

$$\delta'(q, a) = \begin{cases} \delta(q, a) & \text{je-li } \delta(q, a) \text{ definováno,} \\ p & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zejména $\delta'(p, a) = p$ pro každé $a \in \Sigma$.

Důkaz korektnosti:

- $\mathcal{M}'$ má totální přechodovou funkci – zřejmé z definice $\mathcal{M}'$.
- $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ jsou ekvivalentní – dokážeme.

Indukcí k délce slova ověříme, že pro každé $q \in Q$ a $w \in \Sigma^*$ platí

$$\widehat{\delta'}(q, w) = \begin{cases} \hat{\delta}(q, w) & \text{je-li } \hat{\delta}(q, w) \text{ definováno,} \\ p & \text{jinak.} \end{cases}$$

Jelikož $p \notin F$, platí $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$. $\square$

Konstrukce konečných automatů

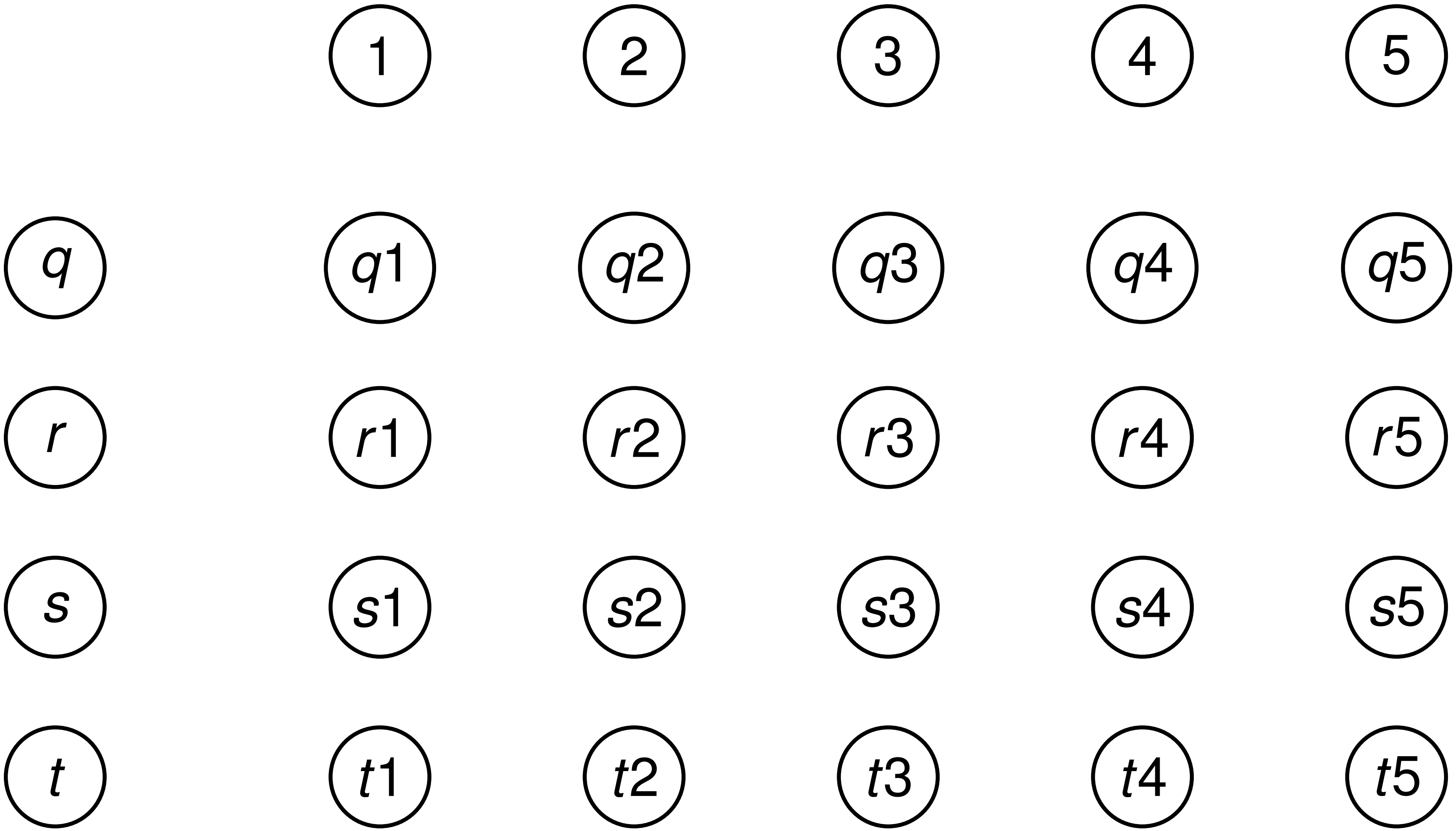
Máme za úkol sestrojit automat rozpoznávající jazyk

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ obsahuje podslovo } abaa\}$$

Označení stavů automatu zvolíme tak, aby bylo patrné, jaká část požadovaného podslova *abaa* již byla automatem přečtena:

Příklad

$\{w \in \{a,b\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abaa \wedge (w = b \vee w$ začíná i končí na a a mezi dvěma výskyty b je vždy alespoň jedno $a)\}$



Synchronní paralelní kompozice automatů

Pro dané automaty $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$ umožňuje sestrojit automat rozpoznávající **průnik** (**sjednocení**, **rozdíl**) jazyků $L(\mathcal{M}_1)$ a $L(\mathcal{M}_2)$.

Nechť $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ a **přechodové funkce** δ_1, δ_2 **jsou totální**.

Definujeme DFA $\mathcal{M}_3 = (Q_3, \Sigma, \delta_3, q_3, F_3)$, kde

- $Q_3 = Q_1 \times Q_2 = \{(p, q) \mid p \in Q_1, q \in Q_2\}$
- $F_3 = F_1 \times F_2 = \{(p, q) \mid p \in F_1, q \in F_2\}$
- $q_3 = (q_1, q_2)$
- $\delta_3((p, q), a) = (\delta_1(p, a), \delta_2(q, a))$

Tvrzení. $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$

Důkaz. Nejprve dokážeme toto tvrzení:

$$\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), w) = (p, q) \iff \widehat{\delta_1}(q_1, w) = p \wedge \widehat{\delta_2}(q_2, w) = q$$

Důkaz se provede indukcí vzhledem k $|w|$.

- **Základní krok $|w| = 0$:**
  Z definice $\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), \varepsilon) = (q_1, q_2)$, $\widehat{\delta_1}(q_1, \varepsilon) = q_1$, $\widehat{\delta_2}(q_2, \varepsilon) = q_2$.
  Pro $w = \varepsilon$ je tedy ekvivalence platná.
- **Indukční krok:** Nechť $w = va$, kde $v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$. Platí:
  $\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), va) = (p, q) \iff$
  $\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), v) = (r, s) \ \wedge \ \delta_3((r, s), a) = (p, q) \iff$
  $\widehat{\delta_1}(q_1, v) = r \ \wedge \ \widehat{\delta_2}(q_2, v) = s \ \wedge \ \delta_1(r, a) = p \ \wedge \ \delta_2(s, a) = q \iff$
  $\widehat{\delta_1}(q_1, va) = p \ \wedge \ \widehat{\delta_2}(q_2, va) = q$

Nyní již lze snadno dokázat vlastní tvrzení věty:

$w \in L(\mathcal{M}_3) \iff$

$\widehat{\delta_3}((q_1, q_2), w) = (p, q)$ kde $p \in F_1$ a $q \in F_2 \iff$

$\widehat{\delta_1}(q_1, w) = p \wedge \widehat{\delta_2}(q_2, w) = q \iff$

$w \in L(\mathcal{M}_1) \cap L(\mathcal{M}_2)$ $\square$

Modifikace pro **sjednocení**, tj. $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \cup L(\mathcal{M}_2)$:

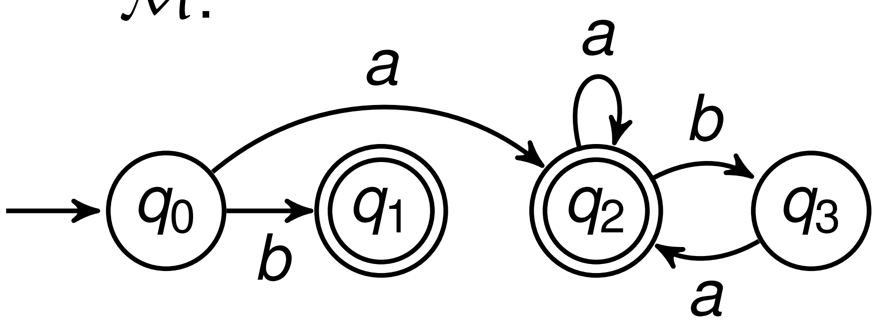
DÚ: Modifikujte konstrukci tak, aby platilo $L(\mathcal{M}_3) = L(\mathcal{M}_1) \setminus L(\mathcal{M}_2)$.

Automat pro komplement

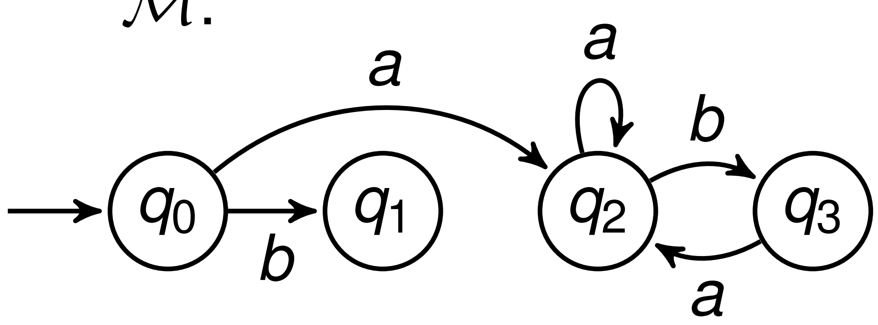
K automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s **totální přechodovou funkcí** sestrojíme automat $\overline{\mathcal{M}}$ rozpoznávající jazyk $co{-}L(\mathcal{M})$ jako

$$\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \smallsetminus F).$$

$\mathcal{M}$:



$\overline{\mathcal{M}}$:



Limity konečných automatů

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\} = \{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb \ldots\}$$

$$a\ a\ a\ a\ a\ b\ b\ b\ b\ b$$

Předpokládejme, že existuje automat $\mathcal{M}$ příjímající jazyk L.
Nechť $\mathcal{M}$ má k stavů.

Uvažme výpočet $\mathcal{M}$ na slově $a^n b^n$ kde $n > k$.

$$aaaaaaaaaaaaaaaaaa\ \ bbbbbbbbbbbbbbbbbb$$

Protože $n > k$, musí existovat (z Dirichletova principu) stav p takový, že při čtení iniciální posloupnosti symbolů a projde automat stavem p (alespoň) dvakrát.

$$aaaaaaaa \;\; aaaaaaa \;\; aaaabbbbbbbbbbbbbbbbbb$$

Platí $\quad \hat{\delta}(q_0, x) = p \qquad \hat{\delta}(p, y) = p \qquad \hat{\delta}(p, z) = r \in F$

Pak ale $\quad \hat{\delta}(q_0, xz) \;=\; \hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), z) \;=\; \hat{\delta}(p, z) \;=\; r \in F$

$$aaaaaaaa \;\; aaaabbbbbbbbbbbbbbbbbb$$

Analogicky můžeme „vsunout“ slovo y:

$$\begin{aligned}
\hat{\delta}(q_0, xyyyz) &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(q_0, x), y), y), y), z) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), y), y), z) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), y), z) \\
&= \hat{\delta}(\hat{\delta}(p, y), z) \\
&= \hat{\delta}(p, z) \\
&= r \in F
\end{aligned}$$

Lemma. [o vkládání, pumping lemma]
Nechť L je regulární jazyk.
Pak existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že libovolné slovo $w \in L$ délky alespoň n lze psát ve tvaru $w = xyz$, kde $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$ a $xy^iz \in L$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$.

Důkaz. Nechť DFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozpoznává jazyk L.
Položme $n = card(Q)$.

Pro libovolné slovo $w \in L$ délky alespoň n platí, že automat $\mathcal{M}$ projde při akceptování slova w (alespoň) dvakrát stejným stavem.

Slovo w tedy můžeme rozdělit na tři části: $w = xyz$, kde $y \neq \varepsilon$ a $\hat{\delta}(q_0, x) = p$, $\hat{\delta}(p, y) = p$ a $\hat{\delta}(p, z) = r \in F$. Je zřejmé, že ke zopakování nějakého stavu dojde nejpozději po zpracování prvních n znaků a tedy dostáváme $|xy| \leq n$.

Dále $\hat{\delta}(p, y^i) = p$ pro libovolné $i \in \mathbb{N}_0$, proto také $\hat{\delta}(q_0, xy^iz) = r$, tj. $xy^iz \in L(\mathcal{M})$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$. $\square$

$$
\begin{aligned}
L \text{ je regulární } \implies\ & \exists n \in \mathbb{N}\ . \\
& \forall w \in L\ . \Big(|w| \geq n \implies \\
& \quad \exists x, y, z\ . \big(w = xyz\ \wedge\ y \neq \varepsilon\ \wedge\ |xy| \leq n\ \wedge \\
& \qquad \forall i \geq 0\ .\ xy^i z \in L \big) \Big)
\end{aligned}
$$

Pomocí Lemmatu lze dokázat, že nějaký jazyk není regulární.

Nechť pro jazyk L platí:

- pro libovolné $n \in \mathbb{N}$
- existuje takové slovo $w \in L$ délky alespoň n, pro které platí, že
- při libovolném rozdělení slova w na takové tři části x, y, z, že $|xy| \leq n$ a $y \neq \varepsilon$,
- existuje alespoň jedno $i \in \mathbb{N}_0$ takové, že $xy^i z \notin L$.

Pak z Lemma o vkládání plyne, že L není regulární.

Příklad důkazu ne-regularity pomocí Lemmatu o vkládání

$L = \{uc^m u^R \mid u \in \{a,b\}^*, m > 0\}$