Minimální automat

Deterministický konečný automat $\mathcal{M}$ s totální přechodovou funkcí nazveme **minimální konečný automat** pro jazyk $L(\mathcal{M})$, neexistuje-li ekvivalentní DFA s totální přechodovou funkcí a menším počtem stavů.

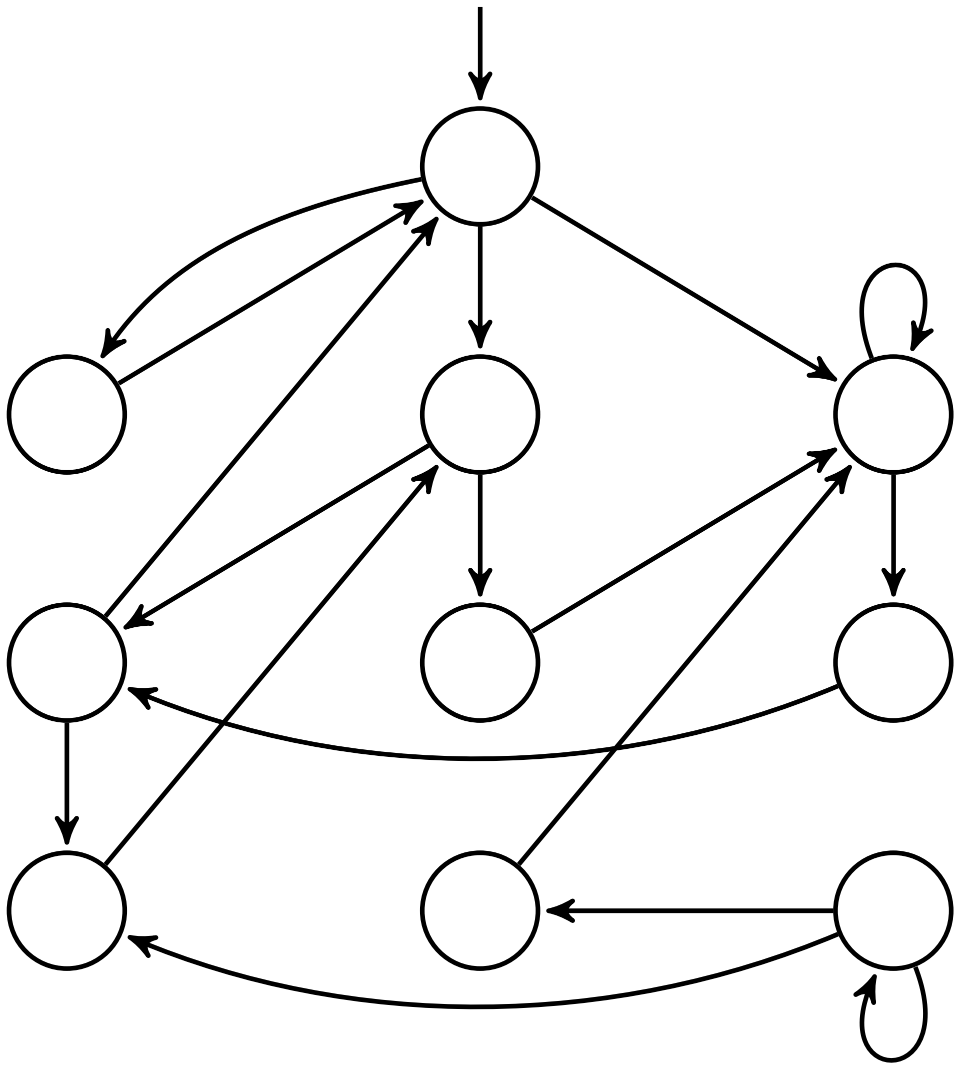
Důsledek 2.31. Minimální konečný automat akceptující regulární jazyk L je určen jednoznačně až na isomorfismus (tj. přejmenování stavů).

Důkaz. plyne přímo z Myhillovy-Nerodovy věty. $\square$

Konstrukce minimálního konečného automatu

Definice 2.18. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA. Stav $q \in Q$ nazveme **dosažitelný**, pokud existuje $w \in \Sigma^*$ takové, že $\hat{\delta}(q_0, w) = q$. Stav je **nedosažitelný**, pokud není dosažitelný.

Příklad



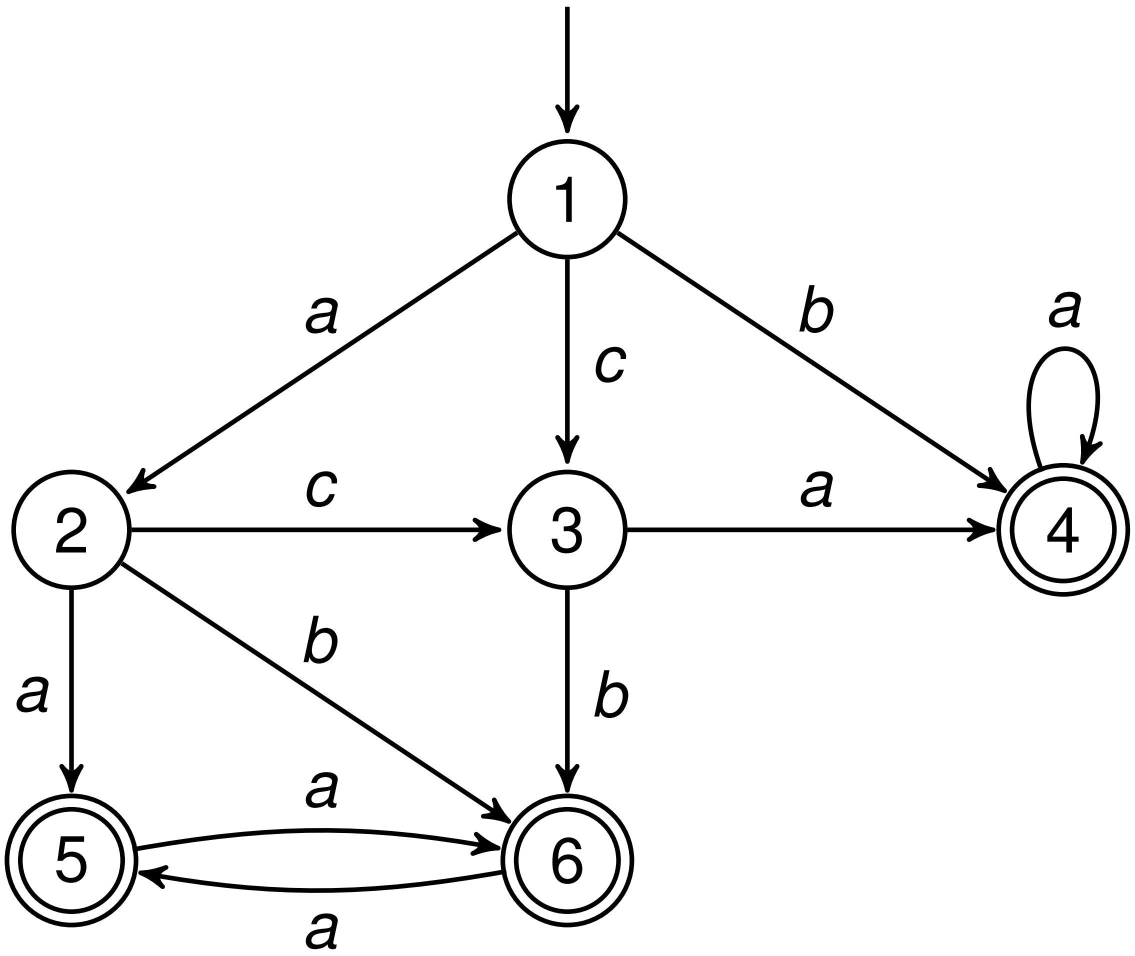
Algoritmus pro eliminaci nedosažitelných stavů DFA

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Výstup: Ekvivalentní automat $\mathcal{M}'$ bez nedosažitelných stavů.

$i := 0$
$S_i := \{q_0\}$
repeat
    $S_{i+1} := S_i \cup \{q \mid \exists p \in S_i, a \in \Sigma : \delta(p, a) = q\}$
    $i := i + 1$
until $S_i = S_{i-1}$
$Q' := S_i$
$\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta|_{Q' \times \Sigma}, q_0, F \cap Q')$

Korektnost: algoritmus je správný a konečný.

Příklad



Eliminace ekvivalentních stavů

Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA bez nedosažitelných stavů, jehož přechodová funkce je totální.

Definice 2.32. Stavy p, q nazveme **jazykově ekvivalentní**, psáno $p \equiv q$, pokud

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F).$$

$$p \equiv q \iff \forall w \in \Sigma^* : (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)$$

Definice 2.34. **Reduktem** automatu $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ nazveme konečný automat $\mathcal{M}/_\equiv = (Q/_\equiv, \Sigma, \eta, [q_0], F/_\equiv)$, kde

- stavy jsou třídy rozkladu $Q/_\equiv$ (třída obsahující stav q je $[q]$),
- přechodová funkce η je funkce splňující

$$\forall p, q \in Q, \forall a \in \Sigma : \ \delta(q, a) = p \implies \eta([q], a) = [p],$$

- počáteční stav je třída rozkladu $Q/_\equiv$ obsahující stav q_0,
- koncové stavy jsou právě ty třídy rozkladu $Q/_\equiv$, které obsahují alespoň jeden koncový stav.

Věta 2.37. Nechť $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ je DFA bez nedosažitelných stavů s totální přechodovou funkcí. Pak $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}/_\equiv)$.

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Definice 2.38. Pro každé $i \in \mathbb{N}_0$ definujeme binární relaci $\equiv_i$ na Q předpisem

$$p \equiv_i q \iff \forall w \in \Sigma^* : \big(|w| \leq i \implies (\hat{\delta}(p, w) \in F \iff \hat{\delta}(q, w) \in F)\big)$$

- $p \equiv_i q \iff p$ a q nelze „rozlišit“ žádným slovem délky $\leq i$
- $p \equiv q \iff p \equiv_i q$ pro každé $i \in \mathbb{N}_0$, tedy $\equiv \; = \bigcap_{i=0}^{\infty} \equiv_i$
- 1. $\equiv_0 \; = \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
  2. $\equiv_{i+1} = \{(p, q) \mid p \equiv_i q \wedge \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$

Algoritmus konstrukce minimálního automatu

Vstup: Deterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.
Výstup: Redukt $\mathcal{M}/_{\equiv}$.

$i := 0$
$\equiv_0 := \{(p, q) \mid p \in F \iff q \in F\}$
repeat
$\quad \equiv_{i+1} := \{(p, q) \mid p \equiv_i q \ \wedge \ \forall a \in \Sigma : \delta(p, a) \equiv_i \delta(q, a)\}$
$\quad i := i + 1$
until $\equiv_i = \equiv_{i-1}$
$\equiv := \equiv_i$
$\mathcal{M}/_{\equiv} := (Q/_{\equiv}, \Sigma, \eta, [q_0], F/_{\equiv})$

Korektnost algoritmu: důkaz vynechán.

Intuice

Příklad

	$\mathcal{M}$	a	b
$\rightarrow$	1	2	–
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	–
	7	6	1

	$\mathcal{M}'$	a	b
$\rightarrow$	1	2	N
	2	3	4
$\leftarrow$	3	6	5
	4	3	2
$\leftarrow$	5	6	3
$\leftarrow$	6	2	N
	N	N	N

	$\equiv_0$	a	b
I	1	I	I
	2	II	I
	4	II	I
	N	I	I
II	3	II	II
	5	II	II
	6	I	I

Příklad

	$\equiv_1$	a	b
I	1	II	I
	N	I	I
II	2	III	II
	4	III	II
III	3	IV	III
	5	IV	III
IV	6	II	I

	$\equiv_2$	a	b
I	1	III	II
II	N	II	II
III	2	IV	III
	4	IV	III
IV	3	V	IV
	5	V	IV
V	6	III	II

	$\mathcal{M}/_{\equiv}$	a	b
$\rightarrow$	I	III	II
	II	II	II
	III	IV	III
$\leftarrow$	IV	V	IV
$\leftarrow$	V	III	II

Kanonický tvar konečných automatů
Motivace

	$\mathcal{M}_1$	a	c	b
	I	IV	III	I
$\rightarrow$	II	V	III	III
$\leftarrow$	III	II	I	I
$\leftarrow$	IV	V	I	II
	V	II	V	V

	$\mathcal{M}_2$	a	b	c
$\rightarrow$	I	III	V	V
	II	IV	II	V
	III	I	III	III
$\leftarrow$	IV	III	I	II
$\leftarrow$	V	I	II	II

Kanonický tvar konečných automatů

		a	c	b
	I	IV	III	I
$\rightarrow$	II	V	III	III
$\leftarrow$	III	II	I	I
$\leftarrow$	IV	V	I	II
	V	II	V	V

		a	b	c
$\rightarrow$	A			
	B			
	C			
	D			
	E			

Rozšíření konečných automatů I
Nedeterministické konečné automaty

Definice 2.42. Nedeterministický konečný automat (NFA) je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všech složek je stejný jako v definici DFA s výjimkou přechodové funkce δ. Ta je definována jako (totální) zobrazení $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$.

Rozšířená přechodová funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$:

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = \{q\}$
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(p, a)$

Jazyk přijímaný nedeterministickým konečným automatem $\mathcal{M}$ definujeme

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Příklad

Ekvivalence DFA a NFA

Věta 2.43. Pro každý NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ existuje ekvivalentní deterministický konečný automat.

Důkaz. Definujeme DFA $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$

- $Q' = 2^Q$, tj. stavy automatu $\mathcal{M}'$ jsou všechny podmnožiny Q.
- $\delta'(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta(q, a)$.

- Množina koncových stavů F' je tvořena právě těmi podmnožinami Q, které obsahují nějaký prvek množiny F.

Korektnost

- $\mathcal{M}'$ je deterministický konečný automat.
- $\mathcal{M}$ a $\mathcal{M}'$ jsou ekvivalentní:
  indukcí k délce $w \in \Sigma^*$ dokážeme $\hat{\delta}(q_0, w) = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w)$

  Základní krok $|w| = 0$: Platí $\hat{\delta}(q_0, \varepsilon) = \{q_0\} = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, \varepsilon)$.

  Indukční krok: Nechť $w = va$, pak

$$\hat{\delta}(q_0, va) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_0, v)} \delta(p, a) = \delta'(\hat{\delta}(q_0, v), a) \text{ (viz definice } \delta'\text{)}$$

$$= \delta'(\widehat{\delta'}(\{q_0\}, v), a) \text{ (indukční předpoklad)} = \widehat{\delta'}(\{q_0\}, va).$$

Pak $L(\mathcal{M}) = L(\mathcal{M}')$, neboť

$w \in L(\mathcal{M}) \iff \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \iff$
$\widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset \iff \widehat{\delta'}(\{q_0\}, w) \in F' \iff w \in L(\mathcal{M}')$. $\square$

Algoritmus transformace NFA na ekvivalentní DFA

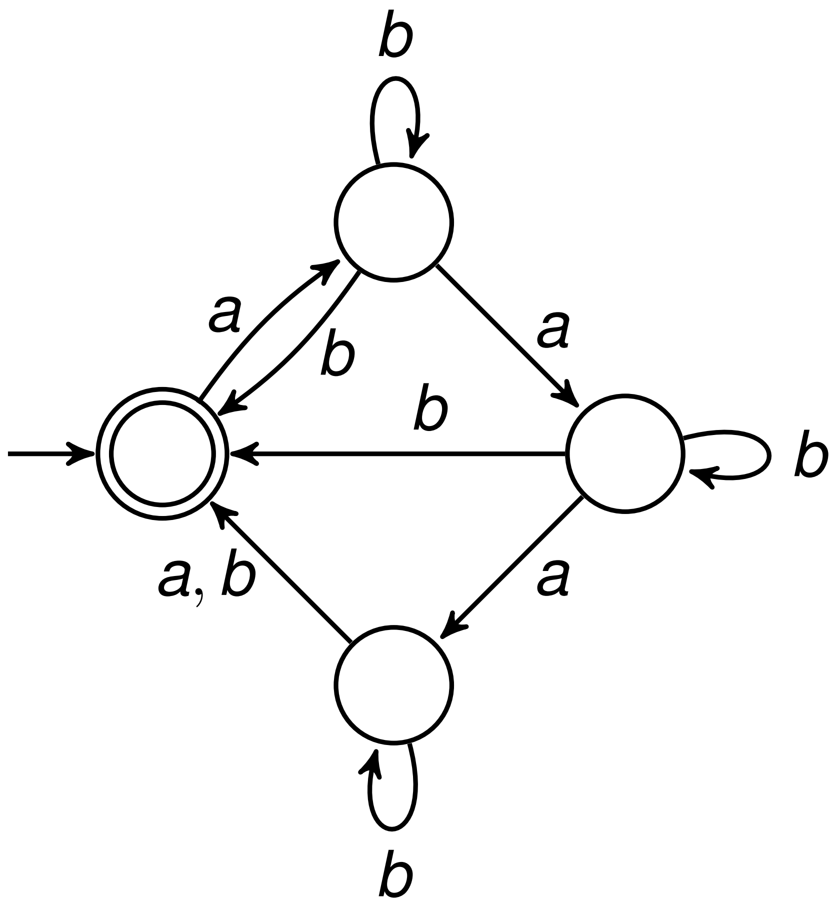
Vstup: Nedeterministický konečný automat $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.
Výstup: Ekvivalentní DFA $\mathcal{M}' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$
bez nedosažitelných stavů a s totální přechodovou funkcí.

$Q' := \{\{q_0\}\}$; $\delta' := \emptyset$; $F' := \emptyset$; $\mathit{Done} := \emptyset$;
while $(Q' \smallsetminus \mathit{Done}) \neq \emptyset$ **do**
  $M :=$ libovolný prvek množiny $Q' \smallsetminus \mathit{Done}$
  If $M \cap F \neq \emptyset$ **then** $F' := F' \cup \{M\}$ **end if**
  for all $a \in \Sigma$ **do**
    $N := \bigcup_{p \in M} \delta(p, a)$
    $Q' := Q' \cup \{N\}$
    $\delta' := \delta' \cup \{((M, a), N)\}$
  end for
  $\mathit{Done} := \mathit{Done} \cup \{M\}$
end while
$\mathcal{M}' := (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$

Důsledky determinizace konečných automatů

Věta 2.44. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje NFA o n stavech takový, že ekvivalentní DFA má i po minimalizaci 2^n stavů.

Důkaz. vynechán.



Rozšíření konečných automatů II
Automaty s ε-kroky

Definice 2.46. Nedeterministický konečný automat s ε-kroky je $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, kde význam všech složek je stejný jako v definici NFA s výjimkou přechodové funkce δ. Ta je definována jako totální zobrazení $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \to 2^Q$.

Rozšířená přechodová funkce

Definujeme funkci $D_\varepsilon : Q \to 2^Q$ následujícím předpisem.
$D_\varepsilon(p)$ je nejmenší množina $X \subseteq Q$ taková, že platí:

- $p \in X$,
- pokud $q \in X$ a $r \in \delta(q, \varepsilon)$, pak také $r \in X$.

Rozšíření funkce D_ε na množiny stavů: pro $Y \subseteq Q$ položíme

$$D_\varepsilon(Y) = \bigcup_{q \in Y} D_\varepsilon(q).$$

Příklad - výpočet D_ε

Definice rozšířené přechodové funkce $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to 2^Q$

- $\hat{\delta}(q, \varepsilon) = D_\varepsilon(q)$,
- $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q,w)} D_\varepsilon(\delta(p, a))$.

Lemma 2.47. V přechodovém grafu automatu $\mathcal{M}$ existuje cesta $p_1 \stackrel{\varepsilon}{\to} \ldots \stackrel{\varepsilon}{\to} p_m \stackrel{a}{\to} q_1 \stackrel{\varepsilon}{\to} \ldots \stackrel{\varepsilon}{\to} q_n$, kde $m, n \geq 1$, $a \in \Sigma$, právě když $q_n \in \hat{\delta}(p_1, a)$.

Jazyk přijímaný automatem $\mathcal{M}$ s ε-kroky definujeme

$$L(\mathcal{M}) = \{w \in \Sigma^* \mid \hat{\delta}(q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}.$$

Příklad - výpočet rozšířené přechodové funkce pro automat s ε-kroky

Ekvivalence automatů s ε-kroky a NFA

Věta 2.48. Ke každému NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ s ε-kroky existuje ekvivalentní NFA (bez ε-kroků).

Důkaz. Konstrukce $\overline{\mathcal{M}} = (Q, \Sigma, \gamma, q_0, G)$ bez ε-kroků:

$$\gamma(q, a) = \hat{\delta}(q, a) \text{ pro každé } q \in Q, a \in \Sigma$$

$$G = \begin{cases} F & \text{pokud } D_\varepsilon(q_0) \cap F = \emptyset \\ F \cup \{q_0\} & \text{jinak} \end{cases}$$

Korektnost: Dokážeme, že pro libovolné $p \in Q$, $w \in \Sigma^+$ platí $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\gamma}(p, w)$ *(indukcí vzhledem k délce slova w)*.

Algoritmus:

□

Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

Věta 2.49. a 2.51. Třída regulárních jazyků je uzavřená na **sjednocení**, **průnik**, **rozdíl** a **komplement**.

Důkaz. synchronní paralelní kompozice automatů + komplement. $\square$

Příklad.

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^i b^i c^j \mid 2i \geq j \geq 0\} \\ L_2 &= \{a\}^*.\{b\}^* \\ L_3 &= \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

$$L_1 \cap L_2 = L_3$$

Jazyk L_2 je regulární, L_3 není regulární $\implies$ L_1 **není regulární**.

Věta 2.52. Třída regulárních jazyků je uzavřená na **zřetězení**.

Důkaz.

Nechť L_1 a L_2 jsou regulární jazyky, rozpoznávané NFA $\mathcal{M}_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_1, F_1)$ a $\mathcal{M}_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_2, F_2)$, kde $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

Definujeme NFA s ε-kroky $\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, q_1, F_2)$, kde

$$\delta = \delta_1 \cup \delta_2 \cup \{((p, \varepsilon), \{q_2\}) \mid p \in F_1\}.$$

Korektnost: Chceme dokázat $L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2) = L(\mathcal{M}_1).L(\mathcal{M}_2)$

$\supseteq$: Nechť $u \in L(\mathcal{M}_1)$, tedy $\exists r \in F_1$ splňující $r \in \widehat{\delta_1}(q_1, u)$.
Nechť $v \in L(\mathcal{M}_2)$, tedy $\widehat{\delta_2}(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$. Pak

$$\hat{\delta}(q_1, uv) = \bigcup_{p \in \hat{\delta}(q_1, u)} \hat{\delta}(p, v) \supseteq \hat{\delta}(r, v) \supseteq \hat{\delta}(q_2, v) = \widehat{\delta_2}(q_2, v).$$

Protože $\widehat{\delta_2}(q_2, v) \cap F_2 \neq \emptyset$, tak $\hat{\delta}(q_1, uv) \cap F_2 \neq \emptyset$.
Tedy $uv \in L(\mathcal{M}_1 \odot \mathcal{M}_2)$.

$\subseteq$:

$\square$

Věta 2.53. Třída regulárních jazyků je uzavřená na **iteraci**.

Důkaz.

Nechť L je regulární jazyk akceptovaný NFA $\mathcal{M} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Definujeme NFA s ε-kroky $\mathcal{M}_* = (Q \cup \{p\}, \Sigma, \delta', p, \{p\})$, kde $p \notin Q$ a

$$\delta' = \delta \cup \{((p, \varepsilon), \{q_0\})\} \cup \{((q, \varepsilon), \{p\}) \mid q \in F\}.$$

□

Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků - Shrnutí