

## Cvičení 10: Číselné charakteristiky a transformace náhodných veličin

### Teorie:

**Střední hodnota** diskrétní náhodné veličiny  $X$  s pravděpodobnostní funkcí  $p_X(x)$  nenulovou pouze pro  $x_i$ , kde  $i \in I$ , je definována jako

$$E(X) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x \cdot p_X(x) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_X(x_i).$$

**Střední hodnota** spojité náhodné veličiny  $X$  s hustotou  $f_X(x)$  je definována jako

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) dx.$$

Střední hodnotou náhodného vektoru je vektor střední hodnot jeho jednotlivých složek (náhodných veličin).

**Rozptylem** (variancí) náhodné veličiny  $X$ , která má konečnou střední hodnotu, nazýváme číslo

$$D(X) = \text{var } X = E([X - E(X)]^2),$$

odmocnina z rozptylu  $\sqrt{D(x)}$  se pak nazývá **směrodatná odchylka**. Na výpočet rozptylu je vhodné použít vzorec  $D(X) = E(X^2) - E(X)^2$ , platí rovněž  $D(a + bX) = b^2 D(X)$ .

**Kovariancí** náhodných veličin  $X_1, X_2$  rozumíme

$$C(X_1, X_2) = E(X_1 - E(X_1))(X_2 - E(X_2)).$$

Je-li  $C(X_1, X_2) = 0$ , říkáme, že  $X_1, X_2$  jsou nekorelované. Stochasticky nezávislé náhodné veličiny jsou vždy nekorelované (nikoliv obráceně, nulová kovariance pouze znamená nulovou **lineární** závislost, nikoliv úplnou nezávislost!). **Koeficient korelace** je jen speciální název pro kovarianci dvou normovaných náhodných veličin:

$$R(X, Y) = \rho_{X,Y} = C \left( \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}, \frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}} \right).$$

**Kvantily:** Pro ryze monotóní distribuční funkci  $F_X$  (tj. spojitou náhodnou veličinu  $X$  s všude nenulovou hustotou, jako je tomu např. u normálního rozdělení) jde o inverzní funkci  $F_X^{-1} : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ . To znamená, že hodnota  $y = F_X^{-1}(\alpha)$  je taková, že  $P(X < y) = \alpha$ . Obecněji, je-li  $F_X(x)$  distribuční funkce náhodné veličiny  $X$ , pak definujeme **kvantilovou funkci**

$$F^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}; F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Kvantil s  $\alpha = 0,5$  nazýváme medián.

## Transformace (funkce) náhodné veličiny

Náhodnou veličinu  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  můžeme pomocí vhodné třídy (tzv. borelovských) funkcí  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  transformovat na jinou náhodnou veličinu  $Y = g(X)$  vztahem  $\forall \omega \in \Omega : Y(\omega) = g(X(\omega))$ . Přitom pro rozdělení pravděpodobnosti **diskrétní** náhodné veličiny  $Y$  zřejmě platí

$$P(Y = y) = \sum_{i: g(x_i)=y} P(X = x_i)$$

a pokud existuje inverzní funkce k funkci  $g$  (například při afinní závislosti, která není konstantní), dostáváme pro pravděpodobnostní funkce vztah

$$p_Y(y) = p_{g(X)}(y) = p_X(g^{-1}(y)).$$

Pro **spojitou** náhodnou veličinu s distribuční funkcí  $F_X$  dostáváme za předpokladu, že transformace  $g$  je rostoucí (analogicky klesající) funkce, vztah

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)),$$

odkud pro hustotu

$$f_Y(y) = \frac{dF(y)}{dy} = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

**Příklad 1.** Pravděpodobnost zásahu cíle jedním výstřelem je 0,75. Náhodná veličina  $X$  udává počet zásahů při 5 nezávislých výstřelech. Určete její rozdělení pravděpodobnosti, střední hodnotu, rozptyl a směrodatnou odchylku.

*Výsledek.* 15/4; 15/16.

**Příklad 2.** Diskrétní náhodná veličina  $X$  nabývá hodnot  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  s pravděpodobnostmi  $P(X = k) = p(1 - p)^k$  (tzv. geometrické rozdělení). Určete  $E(X)$  (střední doba čekání na úspěch) a  $D(X)$ .

*Výsledek.*  $\frac{1-p}{p}, \frac{1-p}{p^2}$

**Příklad 3.** Náhodná veličina  $X$  má hustotu  $f_X(x) = \frac{3}{x^4}$  pro  $x \in (1, \infty)$  a jinde nulovou. Určete její distribuční funkci, střední hodnotu a rozptyl.

*Výsledek.*  $F(x) = 1 - \frac{1}{x^3}, E(X) = \frac{3}{2}, D(X) = \frac{3}{4}$ .

**Příklad 4.** Náhodná veličina  $X$  má hustotu rovnu  $f_X(x) = \cos x$  pro  $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$  a jinde nulovou. Určete střední hodnotu, rozptyl a medián této veličiny.

*Výsledek.*  $\frac{\pi}{2} - 1, \frac{\pi}{6}, \pi - 3$ .

**Příklad 5.** Náhodná veličina  $X$  má hustotu rovnu  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  pro  $x \geq 0$ , kde  $\lambda > 0$  je daný parametr rozdělení, a jinde nulovou (tzv. exponenciální rozdělení). Určete střední hodnotu, rozptyl, modus (reálné číslo s maximální hustotou, resp. pravděpodobnostní funkcí) a medián této veličiny.

*Výsledek.*  $\frac{1}{\lambda}, \frac{\ln 2}{\lambda}, 0, \frac{1}{\lambda^2}$

**Příklad 6.** Diskrétní náhodný vektor  $(X_1, X_2)$  má simultánní pravděpodobnostní funkci  $\pi(0, -1) = c, \pi(0, 0) = \pi(0, 1) = \pi(1, -1) = \pi(2, -1) = 0, \pi(1, 0) = \pi(1, 1) = \pi(2, 1) = 2c, \pi(2, 0) = 3c$  a rovnou nule jinde. Určete konstantu  $c$  a vypočtěte:

1. kovarianci  $C(X_1, X_2)$ ,
2. korelační koeficient  $R(X_1, X_2)$ .

*Výsledek.* 1. 0,18; 2. 0,42.

**Příklad 7.** Náhodná veličina  $X$  má hustotu  $f(x)$ . Určete hustotu náhodné veličiny  $Y$  tvaru

- a)  $Y = e^X, X \geq 0$ ,
- b)  $Y = \sqrt{X}, X > 0$ ,
- c)  $Y = \ln X, X > 0$ ,
- d)  $Y = \frac{1}{X}, X > 0$ .

*Výsledek.*  $f(\ln y) \frac{1}{y}; 2f(y^2)y; f(e^y)e^y; f(1/y) \frac{1}{y^2}$ .

**Příklad 8.** Náhodná veličina  $X$  má rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti na intervalu  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Určete jeho hustotu a hustotu transformovaných veličin  $Y = \sin X, Z = \operatorname{tg} X$ .