# Matematika III, 4. cvičení

## Implicitně zadaná funkce

Nechť $F(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, dále $F(x_0, y_0) = 0$ a $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí $U$ bodu $x_0$, přičemž $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Funkce $y = f(x)$ je tedy rovností $F(x,y) = 0$ implicitně definovaná v okolí bodu $x_0$. Pokud $F'_y(x_0, y_0) = 0$, funkce $f$ se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.
Podobné tvrzení platí pro funkci více proměnných, uvedeme si ještě případ pro 3 proměnné: Nechť $F(x,y,z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0, z_0]$, dále $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ a $F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí $U$ bodu $[x_0, y_0]$, přičemž $F(x, y, f(x,y)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Pokud $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, funkce $f$ se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

Funkci značíme písmenem $y$, proměnnou písmenem $x$, můžeme si představit, že $y = f(x)$. Proto derivace $x$ je 1, ale derivace $y$ je $y'$, takže např. $(x^2)' = 2x$ a $(y^2)' = 2yy'$.

**Příklad 1.** *Určete první a druhou derivaci, pokud* $x^2 + y^2 = 1$.

*Výsledek.* $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = -\frac{y^2+x^2}{y^3}$.

**Příklad 2.** *Určete derivaci, pokud* $xy^2 - 2xy + x^3 - 3y^2 + 5 = 0$.

*Výsledek.* $y' = \frac{2y-3x^2-y^2}{2xy-2x-6y}$.

**Příklad 3.** *Určete derivaci, pokud* $\sin(x^2) + \cos(y^2) - 1 = 0$.

*Výsledek.* $y' = \frac{x\cos(x^2)}{y\sin(y^2)}$.

**Příklad 4.** *Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[1,1]$ implicitně rovnicí $y^3 - 2xy + x^2 = 0$. Určete $y'(1)$ a $y''(1)$.*

*Výsledek.* $y'(1) = 0$, $y''(1) = -2$.

**Příklad 5.** *Nechť je funkce $y = y(x)$ dána v okolí bodu $[\frac{\pi-1}{2}, \frac{\pi}{2}]$ implicitně rovnicí $y - \frac{\sin y}{2} = x$. Určete $y'(\frac{\pi-1}{2})$ a $y''(\frac{\pi-1}{2})$.*

*Výsledek.* $y'(\frac{\pi-1}{2}) = 1, y''(\frac{\pi-1}{2}) = -\frac{1}{2}$.

**Příklad 6.** *Na kuželosečce $k$ o rovnici $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ najděte všechny body, v nichž je normála k této kuželosečce rovnoběžná s osou $y$. Pro každý nalezený bod zapište obecnou rovnici tečny k dané křivce v tomto bodě.*

*Výsledek.* $[1,1]$ a $[1,-3]$, rovnice tečen jsou $y = 1$, resp. $y = -3$.

**Příklad 7.** *Na grafu funkce tří proměnných $u = f(x,y,z)$ dané předpisem $u = x\sqrt{y^2+z^2}$ najděte bod, v němž je tečná nadrovina k tomuto grafu rovnoběžná s rovinou o rovnici $x + y - z - u = 0$.*

*Výsledek.* Zadání splňují dva body: $[\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ a $[-\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$.

**Příklad 8.** *K elipsoidu o rovnici $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ veďte tečné roviny rovnoběžné s rovinou o rovnici $x - y + 2z = 0$.*

*Nápověda.* Rovnici tečné roviny k elipsoidu určíme pomocí parciálních derivací funkce $z = z(x, y)$ dané implicitně rovnicí elipsoidu $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$. Pak normálový vektor k elipsoidu v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ bude $(z'_x(x_0, y_0), z'_y(x_0, y_0), -1)$. Tento vektor musí být rovnoběžný s normálovým vektorem $(1, -1, 2)$ zadané roviny, tudíž $(-2z'_x(x_0, y_0), -2z'_y(x_0, y_0), 2) = (1, -1, 2)$. Z toho dostaneme $2x_0 = z_0, 4y_0 = -z_0$ a po dosazení do rovnice elipsoidu dostaneme dva body dotyku hledaných tečných rovin: $[\frac{2}{\sqrt{22}}, -\frac{1}{\sqrt{22}}, \frac{4}{\sqrt{22}}]$ a $[-\frac{2}{\sqrt{22}}, +\frac{1}{\sqrt{22}}, -\frac{4}{\sqrt{22}}]$. Odtud už snadno určíme rovnice tečných rovin.

Přímočařejším postupem můžeme úlohu vyřešit, pokud si uvědomíme, že normálovým vektorem v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ plochy implicitně zadané vztahem $F(x, y, z) = 0$ je vektor $(F'_x(x_0, y_0, z_0), F'_y(x_0, y_0, z_0), F'_z($

*Výsledek.* Hledané tečné roviny mají rovnice $x - y + 2z = \pm\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{2}}$.

**Příklad 9.** *V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu $h$ o rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

*nelze vyjádřit $z$ jako funkci $z = f(x, y)$?*

*Nápověda.* Určete body $[x_0, y_0, z_0]$ na $h$ splňující $F'_z(x_0, y_0, z_0) = 0$, kde $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$.

*Výsledek.* Množina hledaných bodů je elipsa obsahující body $[x_0, y_0, 0]$, kde $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

**Příklad 10.** *V okolí kterých bodů křivky $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$ nelze vyjádřit $y$ jako funkci $y = f(x)$?*

*Výsledek.* $[2, 2], [-2, -2]$.

**Příklad 11.** *V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy $z^2 - 2px = 0$, kde $p > 0$, nelze vyjádřit $z$ jako funkci $z = f(x, y)$?*

*Výsledek.* Všechny body osy $y$.