Cvičení 9: Pravděpodobnost, náhodné jevy, náhodné veličiny, distribuční funkce

Příklad 1. Dokažte následující vlastnosti pravděpodobnosti:

- $P(\emptyset) = 0,\ 0 \leq P(A) \leq 1,$
- $P(A^c) = 1 - P(A),$
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B),\ P(B \setminus A) = P(B) - P(A),$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

Příklad 2. V seminární skupině MB104 je 23 studentů. Studenti se dělí na

- 8 dobrých, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 90%;
- 12 průměrných, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 60%;
- ostatní slabé, kteří na matematiku navíc „kašlou“, a tak mají pravděpodobnost složení zkoušky jen 0,1.

a) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolený student zkoušku složí.

b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student, úspěšně složivší zkoušku, byl z těch, kteří na matematiku „kašlali“.

Výsledek. a) 0,639; b) 0,0204;

Příklad 3. Tyč délky d je náhodně rozlomená na tři části. Určete pravděpodobnost, že je možné z těchto částí sestrojit trojúhelník.

Výsledek. 0,25.

Teorie:

- Náhodná veličina, distribuční funkce, pravděpodobnostní funkce, hustota;
- Nezávislost náhodných veličin, náhodný vektor, marginální a sdružené pravděpodobnostní funkce, hustoty a distribuční funkce.

Příklad 4. Hodíme jedenkrát kostkou, množina elementárních jevů je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Jevovým polem nechť je $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \Omega\}$.

Zjistěte jestli zobrazení $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dané předpisem

a) $X(\omega_i) = i$ pro každé $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

b) $X(\omega_1) = X(\omega_2) = -2, X(\omega_3) = X(\omega_4) = X(\omega_5) = X(\omega_6) = 3$

je náhodnou veličinou vzhledem k $\mathcal{A}$.

Výsledek. ne; ano.

Příklad 5. Střelec střílí do terče až do prvního zásahu. Má v zásobě 4 náboje. Pravděpodobnost zásahu je při každém výstřelu rovna 0,6. Nechť náhodná veličina X udává počet nespotřebovaných nábojů. Určete pravděpodobnostní a distribuční funkci X a nakreslete jejich grafy.

Příklad 6. Náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$\pi(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{3}{7} \cdot 0{,}7^x & \text{pro } i = 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

a) $P(X < 3)$,

b) $P(X > 4)$,

c) $P(1 < X < 4)$.

Příklad 7. Náhodná veličina má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 3 \\ \frac{1}{3}x - 1 & \text{pro } 3 < x \leq 6 \\ 1 & \text{pro } 6 < x. \end{cases}$$

a) Zdůvodněte, že jde skutečně o distribuční funkci.

b) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

c) Vypočtěte $P(2 < X < 4)$.

Příklad 8. Náhodná veličina má distribuční funkci

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} & \text{pro } -2 < x \leq 2 \\ 1 & \text{pro } 2 < x. \end{cases}$$

a) Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné veličiny X.

b) Vypočtěte $P(-1 < X < 1)$.

Výsledek. $\frac{1}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ pro $-2 < x \leq 2$, jinak 0; $\frac{1}{3}$.

Příklad 9. Hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny X má tvar $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}$. Určete

a) koeficient a,

b) distribuční funkci,

c) $P(-1 < X < 1)$.

Výsledek. $\frac{1}{\pi}$; $\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$.

Příklad 10. Diskrétní náhodný vektor má sdruženou pravděpodobnostní funkci danou tabulkou

X \ Y	2	5	6
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$

Určete

a) marginální distribuční a pravděpodobnostní funkce;

b) sdruženou distribuční funkci a vhodným způsobem ji znázorněte;

c) $P(Y > 3X)$.

Výsledek. $\frac{3}{20}$.

Příklad 11. Určete distribuční funkci náhodného vektoru (X, Y), jehož hustota je

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(4x - y) & \text{pro } 1 \le x \le 2, 2 \le y \le 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete dále $P(Y > 2X)$.

Výsledek. $\frac{1}{3}$.

Příklad 12. Určete marginální distribuční funkce, sdruženou a marginální hustotu náhodného vektoru (X, Y), je-li

$$F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0, \text{nebo } y < 0 \\ \frac{1}{4}x^2y^2 & \text{pro } 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 \\ 1 & \text{pro } x > 1, y > 2 \\ x^2 & \text{pro } 0 \le x \le 1, y > 2 \\ \frac{y^2}{4} & \text{pro } x > 1, 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

Příklad 13. Určete hustotu pravděpodobnosti náhodného vektoru (X, Y), jehož distribuční funkce je

$$F(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq -1 \\ \frac{1}{\pi^2}(\arcsin x + \frac{1}{2})(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } |x| < 1 \\ \frac{1}{\pi}(\operatorname{arctg} y + \frac{\pi}{2}) & \text{pro } x \geq 1. \end{cases}$$

Určete rovněž marginální hustoty a rozhodněte, jsou-li veličiny X a Y nezávislé.

Výsledek. $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, kde $f_1(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ pro $-1 < x < 1$, jinak 0, a $f_2(x) = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$. Jsou nezávislé.

Příklad 14. V urně je 14 kuliček – 4 červené, 5 bílých a 5 modrých. Náhodně bez vracení vybereme 6 kuliček. Určete rozložení náhodného vektoru (X, Y), označuje-li X počet tažených červených kuliček a Y počet tažených bílých kuliček. Určete rovněž marginální rozložení veličin X a Y. Dále vypočtěte $P(X \leq 3), P(1 \leq Y \leq 4)$.

Příklad 15. Hustota náhodného vektoru (X, Y, Z) je

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & \text{pro } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete konstantu c, distribuční funkci a vypočtěte $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{3}, 0 \leq Z \leq \frac{1}{4})$.

Výsledek. $c = \frac{2}{3}$, $P(0 \leq X \leq \frac{1}{2}, 0 \leq Y \leq \frac{1}{3}, 0 \leq Z \leq \frac{1}{4}) = \frac{5}{48}$.