Klasifikace reálných symetrických matic

Klasifikace spočívá v určení definitnosti matice. Tento pojem souvisí s vlastními čísly a jeho přesný význam pro nás není důležitý. Nechť je A reálná symetrická matice $n \times n$. Zajímají nás *hlavní minory* matice A. To jsou determinanty těchto matic:

- Matice 1×1, která začíná v levém horním rohu matice A. Tedy prvek a_{11}.
- Matice 2×2, která začíná v levém horním rohu matice A.
- Matice 3×3, která začíná v levém horním rohu matice A.
- $\ldots$
- Matice $n \times n$, tedy samotná matice A.

Sylvestrovo kritérium dává do vztahu definitnost matice s jejími hlavními minory.

Věta (Sylvestrovo kritérium)**.** *Pro reálnou symetrickou matici A platí následující:*

1. *jsou-li všechny hlavní minory kladné, pak je A pozitivně definitní.*
2. *pokud hlavní minory střídají znaménko počínaje záporným, pak je A negativně definitní.*

Pro zjištění indefinitnosti nebo semidefinitnosti Sylvestrovo kritérium obecně nelze použít. Pouze v případě $n = 2$ (to je ten který nás nejvíce zajímá) lze tvrzení zesílit:

Věta. *Pro reálnou symetrickou* 2×2 *matici A platí:*

1. *je-li* $a_{11} > 0$ *a* $\det A > 0$*, pak je A pozitivně definitní.*
2. *je-li* $a_{11} < 0$ *a* $\det A > 0$*, pak je A negativně definitní.*
3. *je-li* $\det A = 0$*, pak je A semidefinitní (jestli pozitivně nebo negativně nás nezajímá).*
4. *je-li* $\det A < 0$*, pak je A indefinitní.*

Souvislost s extrémy více proměnných

Má-li funkce více proměnných spojité parciální derivace až do druhého řádu, lze o existenci extrému ve stacionárním bodě rozhodnout pomocí Hessovy matice.

Věta. *Nechť H označuje Hessovu matici vyčíslenou ve stacionárním bodě. Pak platí:*

1. *je-li H pozitivně definitní, pak v tomto bodě nastává minimum.*
2. *je-li H negativně definitní, pak v tomto bodě nastává maximum.*
3. *je-li H indefinitní, pak zde extrém nenastává.*
4. *je-li H semidefinitní (pozitivně nebo negativně), pak o existenci extrému nelze nic říct. Musíme použít jiný postup.*

V kombinaci se Sylvestrovým kritériem tak můžeme docela explicitně popsat chování funkce dvou proměnných. Tento popis naleznete před zadáním třetího příkladu v dokumentu cviceni3.pdf.