

Matematika III, 2. cvičení

Limity funkcí více proměnných

Pro počítání limit $\frac{0}{0}$ a $\frac{\infty}{\infty}$ nemáme k dispozici žádnou analogii L'Hospitalova pravidla, musíme tedy používat různé úpravy. Rozdíl mezi limitou funkce jedné proměnné a limitou funkce dvou proměnných spočívá v odlišnosti okolí limitního bodu: u funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po přímce, tj. ze dvou stran (pak má funkce limitu v bodě, pokud existují obě jednostranné limity, které se rovnají), ale u funkce dvou a více proměnných se k limitnímu bodu můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby (po přímkách, parabolách, ...). Existence limity v daném bodě znamená, že nezáleží na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Pokud tedy dostaneme různé hodnoty limity pro různé cesty, limita v daném bodě neexistuje. V následujících příkladech vypočítejte limity, případně dokažte, že neexistují.

Nápověda. Pokud po dosažení limitních bodů nevyjde neurčitý výraz, můžeme tyto limitní body dosadit. Pokud vyjde neurčitý výraz, můžeme zkusit různé postupy:

- (1) rozložit čitatel nebo jmenovatel na součin podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;
- (2) rozšířit čitatel i jmenovatel něčím vhodným podle nějakého známého vzorce a pak by se něco mohlo vykrátit;
- (3) $\frac{\text{ohraňčený výraz}}{\infty} = 0, 0 \cdot (\text{ohraňčený výraz}) = 0$;
- (4) použít vhodnou substituci, po které bychom dostali limitu jedné proměnné;
- (5) převést limitu dvou proměnných do polárních souřadnic

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi\end{aligned}$$

(je-li v limitě výraz $x^2 + y^2$, polární souřadnice většinou fungují, protože pak dostaneme jednodušší výraz $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2$, který nezávisí na φ);

- (6) zvolit $y = kx$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po přímkách, v případě jiného limitního bodu je potřeba drobná úprava, aby přímky limitním bodem procházely), $y = kx^2$ (k limitnímu bodu $[0, 0]$ se blížíme po parabolách, v případě jiného limitního bodu je opět potřeba drobná úprava), případně jinak vhodně parametricky nahradit $x = f(k)$ a $y = g(k)$, a pokud bude hodnota limity záviset na parametru k , limita neexistuje; tento postup lze použít pouze k důkazu neexistence limity, nikoliv k výpočtu její hodnoty za předpokladu, že existuje!

Příklad 14. $\lim_{(x,y) \rightarrow (e^2, 1)} \frac{\ln x}{y}$

Výsledek. 2.

Příklad 15. $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,4)} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}$

Nápověda. Rozložte jmenovatel na součin podle vzorce pro rozdíl druhých mocnin.

Výsledek. $\frac{1}{4}$.

Příklad 16. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1, \infty)} \frac{\cos y}{x + y}$

Nápověda. Použijte postup (3).

Výsledek. 0.

Příklad 17. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{e^{xy}-1}{x}$

Nápověda. Rozšiřte zlomek výrazem $\frac{y}{y}$ a použijte substituci $t = xy$ (protože $(x, y) \rightarrow (0, 2)$, bude $t \rightarrow 0$).

Výsledek. 2.

Příklad 18. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ a protože $(x, y) \rightarrow (\infty, \infty)$, bude $r \rightarrow \infty$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Výsledek. 0.

Příklad 19. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Nápověda. Zvolte dvě různé parametrizace, první bude $y = 1 - e^x$, druhá bude $y = x$.

Výsledek. Pro první parametrizaci vyjde hodnota limity -4 , pro druhou vyjde 0, takže limita neexistuje.

Příklad 20. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic, kde $r \rightarrow 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Výsledek. $\cos 2\varphi$, záleží tedy na tom, odkud se k bodu $[0, 0]$ blížíme, tudíž limita neexistuje.

Příklad 21. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$

Nápověda. Převeďte do polárních souřadnic, kde $r \rightarrow \infty$, $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$.

Výsledek. 1 pro $\varphi = \frac{\pi}{4}$, ale pro $\varphi \neq \frac{\pi}{4}$ vyjde 0, takže limita neexistuje.

Příklad 22. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Výsledek. $\sqrt{2}$.

Příklad 23. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

Výsledek. 2.

Příklad 24. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^2 \cos \frac{1}{xy^2}$

Výsledek. 0.

Příklad 25. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin xy}{x}$

Výsledek. 0.

Příklad 26. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

Výsledek. 0.

Příklad 27. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} (x^2 + y^2)e^{-(x+y)}$

Výsledek. 0.

Příklad 28. $\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty,1)} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$

Výsledek. e.

Příklad 29. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

Výsledek. Neexistuje.

Příklad 30. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)xy}$

Výsledek. Neexistuje.

Příklad 31. Dokažte, že $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-y}{x^2-y}$ neexistuje.

Nápověda. Zvolte $y = kx^2$, tedy k bodu $[0, 0]$ se budeme blížit po parabolách.

Příklad 32. Pomocí svazku přímek procházejících limitním bodem dokažte, že následující limita neexistuje:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,-2)} \frac{2x + xy - y - 2}{x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5}$$

Nápověda. Přímky ze svazku mají rovnice $y = kx + q$, vyjádřete q v závislosti na k tak, aby odpovídající přímky procházely bodem $[1, -2]$.

Výsledek. Limita vyjde rovna $\frac{k}{1+k^2}$, což závisí na k , limita je tedy závislá na směru, ze kterého se blížíme k limitnímu bodu, takže limita neexistuje.

Spojitosť funkcí více proměnných

Funkce je spojitá v bodech, ve kterých má vlastní limitu (tj. limita existuje a je různá od $\pm\infty$), která je rovna funkční hodnotě.

Příklad 33. Určete body, v nichž není spojitá funkce $f(x, y) = \frac{2x-5y}{x^2+y^2-1}$.

Výsledek. Kružnice $k([0, 0]; 1)$.

Příklad 34. Určete body, v nichž není spojitá funkce $f(x, y) = \frac{\sin(x^2y+xy^2)}{\cos(x-y)}$.

Výsledek. Množina bodů $\{[x, x + (2k + 1)\frac{\pi}{2}]; x \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}\}$.

Příklad 35. Určete body, v nichž není spojitá funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{pro } [x, y] \neq [0, 0], \\ 0 & \text{pro } [x, y] = [0, 0]. \end{cases}$$

Výsledek. Funkce je všude spojitá, včetně bodu $[0, 0]$.