Matematika III, 5. cvičení

Lokální extrémy funkcí více proměnných

Připomeňme, že pro funkci jedné proměnné $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a její stacionární bod x_0 (tj. bod $x_0 \in \mathbb{R}$, pro který platí $f'(x_0) = 0$) platí:

- je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum,
- je-li $f''(x_0) \leq 0$, má funkce f v bodě x_0 neostré lokální minimum,
- je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum,
- je-li $f''(x_0) \geq 0$, má funkce f v bodě x_0 neostré lokální maximum.

Pro jednoduchost budeme uvažovat funkci dvou proměnných $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, obecný případ pro funkci $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ byl probrán na přednášce. Podobné tvrzení jako pro lokální extrémy funkcí jedné proměnné dostaneme pro funkce dvou (resp. více) proměnných:

Nechť $[x_0, y_0]$ je stacionární bod funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (tedy platí $f'_x(x_0, y_0) = 0, f'_y(x_0, y_0) = 0$) a nechť má tato funkce v nějakém okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace druhého řádu. Pak platí:

- Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ a

  $$\det Hf(x_0, y_0) = \det \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_0, y_0) & f''_{xy}(x_0, y_0) \\ f''_{xy}(x_0, y_0) & f''_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix} = f''_{xx}(x_0, y_0) f''_{yy}(x_0, y_0) - [f''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

  má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální minimum,
- Je-li $f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ a $\det Hf(x_0, y_0) > 0$, má funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ostré lokální maximum,
- Je-li $\det Hf(x_0, y_0) < 0$, extrém v bodě $[x_0, y_0]$ nenastává,
- V ostatních případech (tj. pokud $\det Hf(x_0, y_0) = 0$), nic o extrému v bodě $[x_0, y_0]$ nevíme, musíme použít různé triky.

Dále platí, že funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (platí to i pro funkce více než dvou proměnných) může mít lokální extrém pouze ve svém stacionárním bodě nebo v bodě, kde alespoň jedna z parciálních derivací neexistuje.

Příklad 87. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$.

Výsledek. Tři stacionární body: $P_1 = [0, 0]$, $P_2 = [1, 1]$, $P_3 = [-1, -1]$. V P_1 extrém nenastává, v obou bodech P_2, P_3 má funkce f ostré lokální minimum.

Příklad 88. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Výsledek. Stacionární body jsou $P_1 = [0, 0], P_2 = [1, 1]$, v P_1 není extrém, v P_2 je ostré lokální minimum.

Příklad 89. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x, y) = \ln(5x) - x^2 + xy + y^2$.

Výsledek. Stacionární body jsou $P_1 = [\sqrt{2/5}, -1/\sqrt{10}], P_2 = [-\sqrt{2/5}, 1/\sqrt{10}]$, ani v jednom z nich extrém nenastává.

Příklad 90. *Určete lokální extrémy funkce*

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$$

ležící v prvním oktantu (tj v části prostoru, kde jsou všechny tři souřadnice nezáporné) a určete jejich typ.

Výsledek. Jediný stacionární bod je $[\frac{1}{2}, 1, 1]$, ve kterém je lokální minimum, neboť

$$Hf = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní např. podle Sylvestrova kritéria ($a_{11} > 0, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0, \det Hf > 0$).

Příklad 91. *Najděte všechny stacionární body funkce* $z = f(x,y)$ *definované implicitně rovnicí* $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$ *a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.*

Výsledek. Vyjde

$$z'_x = -\frac{4x + 8z}{8x + 2z - 1}, \quad z'_y = -\frac{4y}{8x + 2z - 1},$$

stacionární body jsou $[-2, 0, 1], [\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}]$. Dále
$Hf(-2,0) = \begin{pmatrix} 4/15 & 0 \\ 0 & 4/15 \end{pmatrix}$, takže funkce $f(x,y)$ má v bodě $[-2,0]$ lokální minimum;
$Hf(\frac{16}{7}, 0) = \begin{pmatrix} -4/15 & 0 \\ 0 & -4/15 \end{pmatrix}$, takže funkce $f(x,y)$ má v bodě $[-2,0]$ lokální maximum.

Příklad 92. *Najděte všechny stacionární body funkce* $z = f(x,y)$ *definované implicitně rovnicí* $x^2 + y^2 + z^2 - xz - \sqrt{2}yz = 1$ *a zjistěte, zda jsou v těchto bodech lokální extrémy.*

Výsledek. Vyjde

$$z'_x = \frac{z - 2x}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z'_y = \frac{\sqrt{2}z - 2y}{2z - x - \sqrt{2}y},$$

stacionární body jsou $[1, \sqrt{2}, 2], [-1, -\sqrt{2}, -2]$. Dále ve stacionárních bodech je

$$z''_{xx} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy} = -\frac{2}{2z - x - \sqrt{2}y}.$$

Ve stacionárních bodech je Hf negativně, resp. pozitivně definitní, proto zde nastává ostré lokální maximum, resp. minimum funkce f.

Příklad 93. *Určete lokální extrémy funkce* $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$.

Výsledek.

$$f'_x = y\left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2x^2}{x^2 + y^2}\right], \quad f'_y = x\left[\ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2}\right],$$

stacionární body jsou

$$P_{1,2} = [0, \pm 1], \quad P_{3,4} = [\pm 1, 0], \quad P_{5-8} = [\pm 1/\sqrt{2e}, \pm 1/\sqrt{2e}].$$

Dále

$$f''_{xx} = \frac{2xy(x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \ln(x^2 + y^2) + 2 - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{2xy(3x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$\det Hf(P_{1-4}) = \det\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = -4 < 0$, tudíž v bodech P_{1-4} není extrém.
Pro $P_5 = [1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}]$ a $P_6 = [-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}]$ je $f''_{xx}(P_{5,6}) = 2 > 0, \det Hf(P_{5,6}) = 4 > 0$, tudíž v bodech P_5, P_6 je ostré lokální minimum.
Pro $P_7 = [1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e}]$ a $P_8 = [-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e}]$ je $f''_{xx}(P_{7,8}) = -2 < 0, \det Hf(P_{5,6}) = 4 > 0$, tudíž v bodech P_7, P_8 je ostré lokální maximum.

Příklad 94. *Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ a pro každý extrém určete jeho typ.*

Výsledek. Vyjde

$$f'_x = 1 + \frac{x-3y}{x^2+y^2}, \quad f'_y = -2 + \frac{3x+y}{x^2+y^2},$$

stacionární bod je $[-7/5, 1/5]$. Dále

$$f''_{xx} = \frac{y^2-x^2+6xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{xy} = \frac{3y^2-3x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}, \quad f''_{yy} = \frac{x^2-y^2-6xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$Hf(-7/5, 1/5) = \left(\begin{smallmatrix} -9/10 & -13/10 \\ -13/10 & 9/10 \end{smallmatrix}\right)$, takže funkce $f(x,y)$ v bodě $[-7/5, 1/5]$ nemá extrém.

Implicitně zadaná funkce

Nechť $F(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0, y_0]$, dále $F(x_0,y_0) = 0$ a $F'_y(x_0,y_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu x_0, přičemž $F(x, f(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Funkce $y = f(x)$ je tedy rovností $F(x,y) = 0$ implicitně definovaná v okolí bodu x_0. Pokud $F'_y(x_0,y_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.
Podobné tvrzení platí pro funkci více proměnných, uvedeme si ještě případ pro 3 proměnné: Nechť $F(x,y,z)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce v okolí bodu $[x_0,y_0,z_0]$, dále $F(x_0,y_0,z_0) = 0$ a $F'_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Pak existuje spojitá funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná na nějakém okolí U bodu $[x_0,y_0]$, přičemž $F(x,y,f(x,y)) = 0$ pro všechna $x \in U$. Pokud $F'_z(x_0,y_0,z_0) = 0$, funkce f se zmíněnými vlastnostmi neexistuje.

Příklad 95. *V okolí kterých bodů jednodílného hyperboloidu h o rovnici*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

nelze vyjádřit z jako funkci $z = f(x,y)$?

Nápověda. Určete body $[x_0,y_0,z_0]$ na h splňující $F'_z(x_0,y_0,z_0) = 0$, kde $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$.

Výsledek. Množina hledaných bodů je elipsa obsahující body $[x_0, y_0, 0]$, kde $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

Příklad 96. *V okolí kterých bodů křivky $x^2 + 2xy - y^2 - 8 = 0$ nelze vyjádřit y jako funkci $y = f(x)$?*

Výsledek. $[2,2], [-2,-2]$.

Příklad 97. *V okolí kterých bodů parabolické válcové plochy $z^2 - 2px = 0$, kde $p > 0$, nelze vyjádřit z jako funkci $z = f(x,y)$?*

Výsledek. Všechny body osy y.