Cvičení 8: Pravděpodobnost, náhodné jevy

Teorie:

Ω – základní prostor, množina všech elementárních jevů (výsledků)
$\omega_1, \dots, \omega_n, \dots$ – elementární jevy
$A \subseteq \Omega$ – náhodný jev,
$A^c = \bar{A} = \Omega \setminus A$ – jev opačný,
$A, B \in \mathcal{A}$ pro které $A \cap B = \emptyset$ – neslučitelné jevy,
$\mathcal{A}$ – jevové pole, je systém podmnožin Ω, splňující:

- jistý jev $\Omega \in \mathcal{A}$,
- pro libovolné $A, B \in \mathcal{A}$ je i $A \setminus B \in \mathcal{A}$
- pro libovolnou nejvýše spočetnou množinu jevů A_i, kde $i \in I$ jsou prvky vhodné indexové množiny, je i $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou neslučitelných jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je $P(\Omega) = 1$.

Funkci P nazýváme pravděpodobností na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Podmíněná pravděpodobnost: Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Podmíněná pravděpodobnost $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k jevu H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Jevy A, B jsou **nezávislé**, pokud $P(A) = P(A|H)$, tj. když $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Příklad 118. Výrobek je podroben třem různým zkouškám. Označme následující jevy:

A – náhodně vybraný výrobek obstojí při první zkoušce,

B – obstojí ve druhé zkoušce,

C – obstojí ve třetí zkoušce.

Vyjádřete v množinové symbolice, že výrobek obstojí

a) jen v první zkoušce,

b) v první a druhé zkoušce, ale neobstojí ve třetí zkoušce,

c) ve všech třech zkouškách,

d) alespoň v jedné zkoušce,

e) právě v jedné zkoušce,

f) maximálně dvakrát.

Příklad 119. a) Uveďte všechna možná jevová pole na $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$.

b) Uveďte alespoň tři různá jevová pole na množině $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4\}$.

Příklad 120. Dokažte následující vlastnosti pravděpodobnosti:

- $P(\emptyset) = 0,\ 0 \leq P(A) \leq 1$,
- $P(A^c) = 1 - P(A)$,
- $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Příklad 121. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ a $\mathcal{A} = \{\Omega, \emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2, \omega_3\}\}$. Určete všechny pravděpodobnostní funkce zobrazující $\mathcal{A}$ do množiny $\{0, 1, \theta, 1 - \theta\}$.

Výsledek. Z definice $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, P(\{\omega_2, \omega_3\} = 1 - P(\omega_1)$. Máme tedy dvě možnosti $P(\omega_1) = \theta, P(\omega_1) = 1 - \theta$.

Příklad 122. Kostku, která stejně obarvené všechny stěny, rozřežeme na 1000 kostiček stejných rozměrů. Všechny kostičky zamícháme a náhodně jednu z nich vytáhneme. Vypočítejte pravděpodobnost, že kostička bude mít:

a) všechny stěny neobarvené,

b) jednu obarvenou stěnu,

c) dvě obarvené stěny,

d) tři obarvené stěny.

Příklad 123. V seminární skupině MB104 je 23 studentů. Studenti se dělí na

- 8 dobrých, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 90%;
- 12 průměrných, kteří mají pravděpodobnost složení zkoušky 60%;

- ostatní slabé, kteří na matematiku navíc „kašlou“, a tak mají pravděpodobnost složení zkoušky jen 0,1.

a) Určete pravděpodobnost, že náhodně zvolený student zkoušku složí.

b) Určete pravděpodobnost, že náhodně vybraný student, úspěšně složivší zkoušku, byl z těch, kteří na matematiku „kašlali“.

Výsledek. a) 0,639; b) 0,0204;

Příklad 124. Před nástupem do nového zaměstnání musí uchazeči podstoupit rutinní preventivní prohlídku, jejíž součástí byl test na HIV. Výrobce testu na HIV uvádí, že test odhalí přítomnost viru u nemocné osoby s pravděpodobností 99,90% a s pravděpodobností 99,99% dá negativní výsledek u zdravé osoby. V České republice je virem nakažen přibližně 1 člověk z 10 000.

a) Určete pravděpodobnost, že pozitivně testovaný uchazeč, který je průměrný z hlediska rizikového chování, má skutečně HIV?

b) Určete pravděpodobnost, že pozitivně testovaný uchazeč, který je opatrný ve vztazích (a má tak desetinovou pravděpodobnost nákazy oproti průměru), má skutečně HIV?

c) Určete pravděpodobnost, že pozitivně testovaný uchazeč, který v minulosti užíval drogy (a má tak stonásobnou pravděpodobnost nákazy oproti průměru), má skutečně HIV?

Výsledek. a) 0,5; b) 0,091; c) 0,99.

Příklad 125. Každý ze dvou parníků může doplout do přístaviště vždy jednou za den, a to se stejnou šancí v kterýkoli jeho okamžik a nezávisle na druhém parníku. První se v přístavišti zdrží jednu hodinu a druhý dvě hodiny. Jaká je pravděpodobnost, že některý z parníků bude muset čekat, až bude volné přístaviště?

Výsledek. 0,121.

Příklad 126. Uvažujte kvadratický polynom $x^2 + ax + b$, jehož koeficienty splňují $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ a všechny přípustné hodnoty koeficientů jsou stejně pravděpodobné.

a) Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou reálné.

b) Určete pravděpodobnost, že všechny kořeny tohoto polynomu jsou kladné.

Výsledek. a) 0,5417. b) 0,0208.

Příklad 127. Tyč délky d je náhodně rozlomená na tři části. Určete pravděpodobnost, že je možné z těchto částí sestrojit trojúhelník.

Výsledek. 0,25.