Matematika III, 5. cvičení

Absolutní extrémy funkcí více proměnných na kompaktní množině

Na kompaktní (tj. uzavřené a ohraničené) množině M nabývá funkce f svých absolutních (globálních) extrémů buď ve stacionárních bodech ležících v M nebo na hranici množiny M. Při určování absolutních extrémů funkce f postupujeme takto:

(1) určíme stacionární body uvnitř M, případně body, ve kterých nějaká parciální derivace funkce f neexistuje;

(2) vyšetříme funkci f na hranici M;

(3) vybereme největší a nejmenší dosaženou funkční hodnotu.

V bodě (2), který bývá obvykle nejtěžší, se dá pro funkci dvou proměnných postupovat následujícím způsobem:

Na částech M_i hranice M si vyjádříme y pomocí x nebo naopak (hranici M rozdělíme na takové části M_i, aby vyjádření jedné proměnné pomocí druhé nebylo moc komplikované), a to pak dosadíme do předpisu funkce f, čímž pro každou část M_i dostaneme novou funkci g_i jedné proměnné. U každé funkce g_i určíme také uzavřený interval (protože M je uzavřená, bude také interval uzavřený), ze kterého je proměnná této funkce, a na tomto intervalu vyšetříme funkci g_i, tj. určíme funkční hodnoty funkce g_i v krajních bodech intervalu, v jejích stacionárních bodech ležících uvnitř intervalu a případně v bodech uvnitř intervalu, ve kterých neexistuje g_i'. Tyto hodnoty funkce g_i budou stejné jako hodnoty funkce f v odpovídajících bodech na hranici M.

Příklad 1. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = (2x^2+3y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ na množině $M : x^2 + y^2 \leq 4$.*

Řešení. Budeme postupovat podle tří výše uvedených bodů.

(1) Nejprve určíme obě parciální derivace a pomocí nich pak stacionární body (vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých $f_x' = 0, f_y' = 0$) ležící uvnitř množiny M, kterou je kruh se středem $[0,0]$ a poloměrem 2.

$$f_x' = [4x + (2x^2 + 3y^2)(-2x)]e^{-(x^2+y^2)} = -2xe^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2 - 2) = 0,$$
$$f_y' = [6y + (2x^2 + 3y^2)(-2y)]e^{-(x^2+y^2)} = -2ye^{-(x^2+y^2)}(2x^2 + 3y^2 - 3) = 0.$$

Obě parciální derivace zřejmě existují v celém $\mathbb{R}^2$, z výše uvedené soustavy tedy najdeme stacionární body, zkontrolujeme, jestli leží v množině M a určíme fukční hodnoty v těchto bodech. Dostáváme 4 možnosti:

(i) $x = 0, y = 0$, pak $f(0,0) = 0$,
(ii) $x = 0, 2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$, z toho $x = 0, y = \pm 1$, pak $f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}$,
(iii) $y = 0, 2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$, z toho $x = \pm 1, y = 0$, pak $f(\pm 1, 0) = \frac{2}{e}$,
(iv) $2x^2 + 3y^2 - 2 = 0, 2x^2 + 3y^2 - 3 = 0$, odečtením dostaneme $1 = 0$, takže tato soustava nemá řešení.

Všechny stacionární body (tj. body $[0,0], [0,\pm 1], [\pm 1, 0]$) zřejmě leží uvnitř kruhu M.

(2) Nyní vyšetříme funkci f na hranici množiny M, tj. na kružnici se středem v bodě $[0,0]$ a poloměrem 2, jejíž rovnice je $x^2 + y^2 = 4$. Nyní bychom mohli přímo do předpisu funkce f dosadit $x^2 + y^2 = 4$ a dostali bychom funkci jedné proměnné:

- vezmeme-li $2x^2 + 3y^2 = 2(x^2 + y^2) + y^2$, bude to funkce $f_1(y) = (8 + y^2)e^{-4}$, kterou bychom vyšetřovali pro $y \in \langle -2, 2\rangle$, protože body kružnice mají y-ové souřadnice od -2 do 2,

- nebo vezmeme-li $2x^2+3y^2 = 3(x^2+y^2)-x^2$, bude to funkce $f_2(x) = (12-x^2)e^{-4}$, kterou bychom vyšetřovali pro $x \in \langle -2, 2\rangle$.

Obecně nemívá předpis funkce f tolik společného s předpisem hranice množiny M, proto budeme postupovat způsobem fungujícím v obecnějším případě, který je popsaný před tímto příkladem.

Hranici M si rozdělíme na dvě části M_1, M_2, horní a dolní půlkružnici. Na každé z těchto částí je y funkcí x, proto si vyjádříme y pomocí x: $y^2 = 4 - x^2$, dostaneme tedy dvě možnosti:

(i) $y = \sqrt{4 - x^2}, x \in \langle -2, 2\rangle$, což je horní půlkružnice,

(ii) $y = -\sqrt{4 - x^2}, x \in \langle -2, 2\rangle$, což je dolní půlkružnice.

(Pokud bychom hranici M rozdělili na pravou a levou půlkružnici, mohli bychom naopak vyjádřit x pomocí y.) Dosazením do předpisu funkce f získáme funkce g_1, g_2, které vyšetříme.

(i) $g_1(x) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = (2x^2+3(4-x^2))e^{-(x^2+(4-x^2))} = (12-x^2)e^{-4}$, kde $x \in \langle -2, 2\rangle$. Hodnoty v krajních bodech intervalu jsou $g_1(\pm 2) = f(\pm 2, \sqrt{4 - (\pm 2)^2}) = f(\pm 2, 0) = 8/e^4$. Derivace je $g_1'(x) = -2xe^{-4} = 0$ pro $x = 0 \in \langle -2, 2\rangle$, což je stacionární bod. Pak $g_1(0) = f(0, 2) = 12/e^4$. Derivace $g_1'(x)$ je všude definovaná, takže máme vyšetřenou funkci $g_1(x)$.

(ii) Situace je téměř stejná jako v (i), neboť platí $f(x, -y) = f(x, y)$, tudíž $g_2(x) = f(x, -\sqrt{4 - x^2}) = f(x, \sqrt{4 - x^2}) = g_1(x)$. Jiné mohou být pouze body pro funkci f, které odpovídají stacionárním bodům funkce g_2 a krajním bodům intervalu. Pak $g_2(\pm 2) = f(\pm 2, -\sqrt{4 - (\pm 2)^2}) = f(\pm 2, 0) = 8/e^4$, $g_2(0) = f(0, -2) = 12/e^4$.

(3) V bodech (1) a (2) jsme získali tyto funkční hodnoty: $f(0, 0) = 0, f(0, \pm 1) = \frac{3}{e}, f(\pm 1, 0) = \frac{2}{e}, f(\pm 2, 0) = 8/e^4, f(0, \pm 2) = 12/e^4$. Z těchto hodnot vybereme největší a nejmenší:

největší hodnota je $\frac{3}{e}$ pro $[x, y] = [0, \pm 1]$,

nejmenší hodnota je 0 pro $[x, y] = [0, 0]$.

Výsledek. Největší hodnota je $\frac{3}{e}$ pro $[x, y] = [0, \pm 1]$, nejmenší hodnota je 0 pro $[x, y] = [0, 0]$.

Příklad 2. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = xy-x^2-y^2+x+y$ v trojúhelníku M ohraničeném souřadnými osami a přímkou $x + y - 4 = 0$.*

Výsledek. Jediným stacionárním bodem je $[1, 1]$, v němž je absolutní maximum $f(1, 1) = 1$. Absolutní minimum -12 je v bodech $[4, 0]$ a $[0, 4]$ ležících na hranici.

Příklad 3. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 3x - 5y$ v trojúhelníku M s vrcholy $A = [0, 2], B = [3, 0]$ a $C = [0, -1]$.*

Výsledek. Absolutní maximum je 7 v bodě $[0, -1]$, absolutní minimum je $-\frac{13}{4}$ v bodě $[\frac{1}{2}, 1]$. Funkční hodnoty v kandidátech na extrém jsou: $f(\frac{1}{2}, 1) = -\frac{13}{4}, f(0, -1) = 7, f(0, 2) = -2, f(3, 0) = 0, f(0, \frac{5}{4}) = -\frac{25}{8}, f(\frac{9}{10}, \frac{7}{5}) = -\frac{49}{20}, f(\frac{36}{17}, -\frac{5}{17}) = -\frac{25}{17}$.

Příklad 4. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = 2x^2 + 4y^2$ na množině M : $x^2 + y^2 \leq 9$.*

Výsledek. Absolutní maximum je 36 v bodech $[0, \pm 3]$, absolutní minimum je 0 v bodě $[0, 0]$.

Příklad 5. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 + 2$ na množině M ohraničené grafy funkcí $y = 2$ a $y = |x|$.*

Výsledek. Absolutní maximum je 22 v bodě $[2, 2]$, absolutní minimum je -2 v bodě $[-2, 2]$.

Příklad 6. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$ na množině určené podmínkami $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2$.*

Výsledek. Absolutní maximum je 17 v bodě $[1, 2]$, absolutní minimum je -3 v bodě $[1, 0]$.

Příklad 7. *Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ na množině $M : x^2 + y^2 \leq z \leq 1$.*

Nápověda. Protože $f'_x = 1, f'_y = 2, f'_z = 3$, nejsou žádné stacionární body, tudíž hledané hodnoty budou na hranici M, tj. na množině $M_1 \cup M_2$, kde $M_1 : x^2 + y^2 = z \leq 1, M_2 : x^2 + y^2 \leq z = 1$. Pro M_1 máme funkci $f_1(x, y) = x + 2y + 3(x^2 + y^2)$ na množině $N_1 : x^2 + y^2 \leq 1$, pro M_2 máme funkci $f_2(x, y) = x + 2y + 3$ na množině $N_2 : x^2 + y^2 \leq 1$. Pro funkce dvou proměnných už to (snad) umíme dořešit.

Výsledek. Absolutní maximum je $3 + \frac{3}{\sqrt{5}}$ v bodě $[\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 1]$, absolutní minimum je $-\frac{5}{12}$ v bodě $[-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{36}]$.

V některých speciálních případech (pokud např. umíme sestrojit vrstevnice funkce, jejíž extrémy hledáme, a pokud množina, na níž tyto extrémy hledáme, je „dostatečně jednoduchá“) můžeme použít rychlejší metodu, kterou si objasníme na následujícím příkladu:

Příklad 8. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = x - y$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : x^2 + y^2 \leq 1$.*

Řešení. Vrstevnice jsou $f(x, y) = c$, tj. $y = x - c$, což jsou přímky rovnoběžné s osou I. a III. kvadrantu. Čím větší c, tím je vrstevnice $y = x - c$ níž a čím menší c, tím je vrstevnice výš. Množina M je kruh $k([0, 0]; 1)$. Absolutní extrémy tedy zřejmě nastanou v případech, kdy vrstevnice bude tečnou ke kružnici, tudíž absolutní maximum nastane v bodě $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, jeho hodnota je $\sqrt{2}$, absolutní minimum nastane v bodě $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, jeho hodnota je $-\sqrt{2}$.

Výsledek. Absolutní maximum v bodě $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, jeho hodnota je $\sqrt{2}$, absolutní minimum v bodě $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, jeho hodnota je $-\sqrt{2}$.

Příklad 9. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = xy$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : |x| + |y| \leq 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum je $\frac{1}{4}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}]$, absolutní minimum je $-\frac{1}{4}$ v bodech $[\pm\frac{1}{2}, \mp\frac{1}{2}]$.

Příklad 10. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = x^2 - 4x + y^2 - 4y + 10$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : x^2 + y^2 \leq 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum je $11 + 4\sqrt{2}$ v bodě $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, absolutní minimum je $11 - 4\sqrt{2}$ v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Příklad 11. *Pomocí vrstevnic funkce $f(x, y) = |x| + |y|$ určete její největší a nejmenší hodnotu na množině $M : (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 1$.*

Výsledek. Absolutní maximum je $2 + \sqrt{2}$ v bodě $[1 + 1/\sqrt{2}, 1 + 1/\sqrt{2}]$, absolutní minimum je $2 - \sqrt{2}$ v bodě $[1 - 1/\sqrt{2}, 1 - 1/\sqrt{2}]$.

Jacobiho matice zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ a jeho inverze

Nechť $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a předpokládejme, že funkce f, g (tj. složky zobrazení F) mají v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace a že Jacobiho matice $F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \\ g'_x(x_0,y_0) & g'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$ zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$ je regulární, tj. $\det F'(x_0, y_0) \neq 0$ ($\det F'(x_0, y_0)$ se nazývá jacobián zobrazení F v bodě $[x_0, y_0]$). Pak existuje okolí bodu $[x_0, y_0]$, v němž je zobrazení F prosté, tudíž k němu existuje inverzní zobrazení F^{-1} v okolí bodu $F(x_0, y_0)$, a pro Jacobiho matici tohoto inverzního zobrazení v bodě $[u_0, v_0] = F(x_0, y_0)$ platí $(F^{-1})'(u_0, v_0) = [F'(x_0, y_0)]^{-1}$.

Příklad 12. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = x^2 - y^2, g(x, y) = 2xy$ (tj. zobrazení $z \mapsto z^2$, uvažujeme-li F jako zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$), prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V případě, že ano, určete Jacobiho matici inverzního zobrazení v bodě $F(2, 1)$.*

Řešení. $F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$, $F'(2, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\det F'(2, 1) = 16 + 4 \neq 0$, tudíž v nějakém okolí bodu $[2, 1]$ je F prosté. Dále $F(2, 1) = [3, 4]$,

$$(F^{-1})'(3, 4) = [F'(2, 1)]^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Výpočet inverzní matice k regulární matici $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ je snadný, neboť $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Výsledek. $\det F'(2, 1) = 20 \neq 0$, tudíž v nějakém okolí bodu $[2, 1]$ je F prosté. Dále

$$(F^{-1})'(3, 4) = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/10 \\ -1/10 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Příklad 13. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = xy, g(x, y) = \frac{x}{y}$, prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(2, 1)$.*

Výsledek. $\det F'(2, 1) = -4 \neq 0$, tudíž F je prosté v nějakém okolí bodu $[2, 1]$. Dále

$$(F^{-1})'(2, 2) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

Příklad 14. *Rozhodněte, zda je zobrazení $F = (f, g) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, kde $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, g(x, y) = xy$, prosté v nějakém okolí bodu $[0, 1]$. V kladném případě určete Jacobiho matici inverzního zobrazení F^{-1} v bodě $F(0, 1)$.*

Výsledek. $\det F'(0, 1) = -1 \neq 0$, tudíž F je prosté v nějakém okolí bodu $[0, 1]$. Dále

$$(F^{-1})'(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 15. *Spočítejte jacobián funkce F, která je transformací dvou proměnných do polárních souřadnic, a příslušné inverzní transformace.*

Nápověda. Funkce F je definována následujícím způsobem:

$$[x, y] \mapsto \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] \quad \text{pro } x > 0,$$
$$[x, y] \mapsto \left[\sqrt{x^2 + y^2}, \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right] \quad \text{pro } x < 0,$$
$$[0, y] \mapsto \left[y, \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(y)\right].$$

Z polárních souřadnic nazpět je to $F^{-1} : [r, \varphi] \mapsto [r \cos \varphi, r \sin \varphi]$. Lépe se bude počítat, když napřed určíme jacobián zobrazení F^{-1} a z něj pak jacobián zobrazení F.
Výsledek. $\det(F^{-1})' = r, \det F' = \frac{1}{r}$.