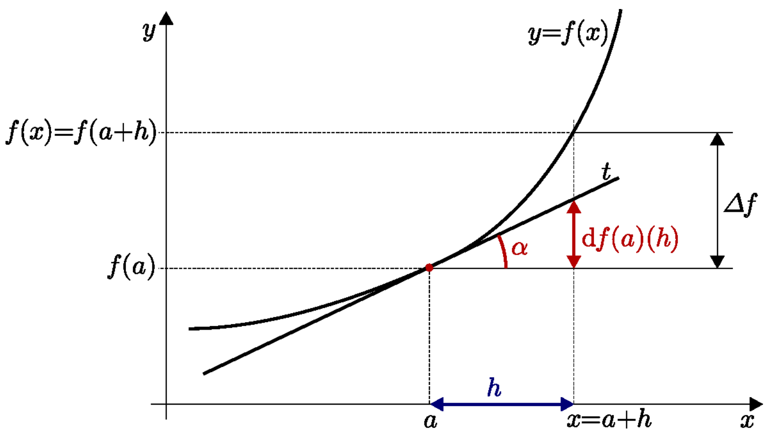
16. Diferenciál funkce a Taylorův polynom

A. Diferenciál funkce

Pojem diferenciálu funkce $y = f(x)$ v bodě a lze nejnázorněji vysvětlit pomocí Obrázku 16.1. Jde o přírůstek funkční hodnoty na tečně. To vlastně znamená, že funkce je v okolí bodu a aproximována tečnou a k přibližnému stanovení funkční hodnoty v bodě „blízko“ bodu a nám stačí určit hodnotu na tečně.



Obr. 16.1: Diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě a

Definice 16.1. Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě a spojitou derivaci (tj. existuje $f'(a)$). **Diferenciálem funkce $f(x)$ v bodě a při přírůstku $h \in \mathbb{R}$** nazýváme číslo

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h. \tag{16.1}$$

Poznámka 16.2. Z Obrázku 16.1 je zřejmé, že platí

$$\operatorname{tg}\alpha = f'(a) = \frac{\mathrm{d}f(a)}{h} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h.$$

Poznámka 16.3. $\Delta f(a)$ je **diference funkce $f(x)$ mezi body a a $a+h$**, tj. přírůstek funkční hodnoty.

Poznámka 16.4. h je **přírůstek proměnné x**, který bývá zvykem značit

$$h = x - a = \mathrm{d}x. \tag{16.2}$$

Definice 16.5. Nechť funkce $y = f(x)$ má v bodě a spojité derivace až do řádu n včetně (tj. existují $f'(a)$, $f''(a)$, ..., $f^{(n)}(a)$). **Diferenciálem řádu n funkce $f(x)$ v bodě a při přírůstku $h \in \mathbb{R}$** nazýváme číslo

$$\mathrm{d}^n f(a)(h) = f^{(n)}(a)h^n\,. \tag{16.3}$$

Poznámka 16.6. Diferenciály (i vyšších řádů) bývá na základě Poznámky 16.4 zvykem značit

$$\mathrm{d}f(a)(h) = f'(a)h = f'(a)\mathrm{d}x = f'(a)(x-a). \tag{16.4}$$

Poznámka 16.7. Pokud pro výpočet funkční hodnoty v bodě $a+h$ použijeme diferenciál, dopustíme se určité chyby

$$R(h) = |\Delta f(a) - \mathrm{d}f(a)(h)|$$

a platí

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{h} = 0.$$

Příklad 16.8. Pomocí diferenciálu spočtěte přibližně $\operatorname{arctg} 0,97$.

Řešení. Zvolíme vhodnou funkci $f(x)$ a vhodný bod a, ve kterém se snadno počítá funkční hodnota a je dostatečně blízko bodu $0,97$. Uvažujme tedy $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a $a = 1$. Vypočteme si přírůstek $h = x - a = 0,97 - 1 = -0,03$.

Chceme tedy spočítat $f(0,97)$.

Vypočtěme nejprve diferenciál $\mathrm{d}f(1)(-0,03)$ pomocí vztahu (16.1) následovně

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$
$$f'(1) = \frac{1}{2},$$
$$\mathrm{d}f(1)(-0,03) = \frac{1}{2}(-0,03).$$

Nyní stačí jen přičíst funkční hodnotu v bodě $a = 1$ a získáme

$$f(0,97) \doteq f(1) + \mathrm{d}f(1)(-0,03) = \frac{\pi}{4} - \frac{0,03}{2} \doteq 0,77.$$

Příklad 16.9. Vypočtěte diferenciál funkce $f(x) = \sin x$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že nebyl zadán ani bod a, ani přírůstek h, bude výpočet naprosto obecný

$$f'(x) = \cos x,$$
$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\mathrm{d}x = \cos x\mathrm{d}x.$$

B. Taylorův polynom

V předchozí kapitole jsme funkční hodnotu v bodě $a+h$ nahrazovali pomocí přírůůstku na tečně ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě a. Je zřejmé, že se tím dopouštíme určité nepřesnosti, která je ovšem vyvážena snadností výpočtu. Pokud bychom chtěli mít výpočet $f(a+h)$ přesnější, jistě by nás napadlo aproximovat graf funkce $y = f(x)$ v okolí bodu a ne těčnou (tj. polynomem 1. stupně), ale polynomem vyššího stupně. To je hlavní myšlenkou aproximace funkce $f(x)$ pomocí Taylorova polynomu.

Věta 16.10. **(Taylorova věta)** Nechť má funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, a+h\rangle$ (resp. v $\langle a+h, a\rangle$ pro h záporné) spojité derivace až do řádu n včetně a v $(a, a+h)$ (resp.v $(a+h, a)$) spojitou derivaci $(n+1)$-řádu. Pak

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_{n+1}, \tag{16.5}$$

kde tzv. **Taylorův zbytek** R_{n+1} lze zapsat například v Lagrangeově tvaru

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1}, \text{ kde } 0 < \vartheta < 1. \tag{16.6}$$

Poznámka 16.11. Píšeme-li přírůstek h ve tvaru $h = x-a$, dostaneme často používaný tvar rovnice (16.5)

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}. \tag{16.7}$$

Chceme-li danou funkci $f(x)$ nahradit v okolí bodu a polynomem, použijeme tzv. Taylorův polynom.

Definice 16.12. **Taylorovým polynomem stupně n v bodě a** nazýváme polynom

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{16.8}$$

Poznámka 16.13. Je-li $a = 0$, pak se polynom (16.8) nazývá **Maclaurinův polynom** a má vyjádření

$$M_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \tag{16.9}$$

Příklad 16.14. Napište Maclaurinův polynom stupně $n = 4$ funkce e^x.

Řešení. Je třeba si určit funkční hodnotu v bodě 0 a první 4 derivace a jejich hodnoty v bodě 0.

$$\begin{aligned}
&f(0) = \mathrm{e}^0 = 1 && \\
&f'(x) = \mathrm{e}^x && \Rightarrow f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1,\\
&f''(x) = \mathrm{e}^x && \Rightarrow f''(0) = \mathrm{e}^0 = 1,\\
&f'''(x) = \mathrm{e}^x && \Rightarrow f'''(0) = \mathrm{e}^0 = 1,\\
&f^{(4)}(x) = \mathrm{e}^x && \Rightarrow f^{(4)}(0) = \mathrm{e}^0 = 1.
\end{aligned}$$

Získané hodnoty dosaďme do vztahu (16.9)

$$\mathrm{e}^x \approx M_4(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}.$$

Příklad 16.15. Nahraďte funkci $y = \cos x$ v okolí počátku (např. v intervalu $\langle -0,1; 0,1\rangle$) polynomem čtvrtého stupně a odhadněte chybu.

Řešení. Je třeba si určit funkční hodnotu v bodě 0, prvních 5 derivací.

$$\begin{aligned}
&f(0) = \cos 0 = 1 && \\
&f'(x) = -\sin x && \Rightarrow f'(0) = -\sin 0 = 0,\\
&f''(x) = -\cos x && \Rightarrow f''(0) = -\cos 0 = -1,\\
&f'''(x) = \sin x && \Rightarrow f'''(0) = \sin 0 = 0,\\
&f^{(4)}(x) = \cos x && \Rightarrow f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1\\
&f^{(5)}(x) = -\sin x. &&
\end{aligned}$$

Tedy

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + R_5.$$

Nyní se zabývejme odhadem chyby R_5, kterou lze pomocí vztahu (16.6) zapsat ve tvaru

$$R_5 = \frac{-\sin(\vartheta x)}{5!}x^5, \text{ kde } 0 < \vartheta < 1.$$

Vzhledem k tomu, že $-1 \leq \sin x \leq 1$, bude pro všechna x z intervalu $\langle -0,1; 0,1\rangle$ platit

$$|R_5| \leq \frac{0,1^5}{5!} = \frac{1}{12000000}.$$