Písemná práce MB103 a MB203, FI MUNI, 12.1.2017

Příklad 1. *(1b.) Graficky znázorněte řešení soustavy nerovnic*

$$x^2 + (y-1)^2 \geq 4$$
$$y - x^2 - 2x = 0$$
$$y \geq 0$$

Příklad 2. *(4b.) Z definice (pomocí limity) určete směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sin(x) + y^2$ v bodu $[0, 0]$ ve směru $(2, 1)$.*

Řešení.

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{\sin(0+2t) + (0+t)^2}{t} &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t)}{t} + \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} \\ &= 2\lim_{t\to 0} \frac{\sin(2t)}{2t} + \lim_{t\to 0} t = 2 + 0 = 2\end{aligned}$$

□

Příklad 3. *(5b.) Určete těžiště útvaru ležícího uvnitř elipsy $3x^2 + (y-1)^2 = 4$ a nad osou x.*

Řešení. Nejprve provedeme afinní transormaci útvaru: „natáhneme souřadnici x multiplikativním faktorem $\sqrt{3}$“ a posuneme souřadnici y o 1 „dolů“. Tím se nám elipsa transformuje na kružnici se středem v počátku a poloměrem 2. Útvar se transformuje na kruhovou úseč této kružnice ležící nad přímkou $y = -1$ (průniky s kružnicí jsou body $[-\sqrt{3}, -1]$ a $[\sqrt{3}, 1]$). Navíc souřadnice x těžiště daného útvaru je zjevně nulová, stačí tedy spočítat souřadnici y. Daný útvar (po zmíněné transformaci) rozdělíme na kruhovou výseč v kružnici mezi úhly $-\pi/6$ a $7\pi/6$ a rovnoramenný trojúhelník s vrcholy $[-\sqrt{3}, -1]$, $[\sqrt{3}, -1]$ a $[0, 0]$. A můžeme počítat. Obsah části útvaru odpovídající kruhové výseči je $S = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{2}{3}4\pi = \frac{8}{3\sqrt{3}}\pi$. Pro souřadnici y výseče pak máme

$$\begin{aligned}y_T = \frac{1}{S}\iint_U y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \begin{vmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{3}} r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{S}\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\int_0^2 r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ = \frac{\sqrt{3}}{\pi}\end{aligned}$$

Těžiště trojúhelníka leží ve třetině jeho výšky, tedy v bodě $[0, \frac{2}{3}]$. Celkem určíme těžiště útvaru pravidlem páky (leží na přímce spojující nalezená dvě těžiště a dělí ji v poměru obsahů výseče a trojúhelníka). Těžiště je v bodě $[0, \frac{6-8\sqrt{3}}{9+8\pi}]$.

Stačilo napsat správné meze pro interál udávající obsah kruhové (eliptické) výseče. V kartézských souřadnicích (bez transformace) bylo nutné těleso rozdělit na pás leží mezi přímkami $x = -1$ a $x = 1$ a dvě „eliptické“ úseče. Při výpočtu vzniklých integrálů se musí stejně používat uvedené transformace. Většina integrovala přes uvedený pás, což nestačí. □

Příklad 4. *(6b.) Určete distribuční funkci (diskrétní) náhodné veličiny udávající celkový počet bílých kuliček vybraných při následujícím pokusu: máme dva sáčky s kuličkami o následujících počtech: v jednom dvě bílé a jedna černá, ve druhém dvě bílé a tři černé. Náhodně vybereme sáček a z něj náhodně kouli. Pokud je bílá, vybereme ještě dvě koule z vybraného sáčku, pokud je černá, vybereme ještě dvě koule z druhého sáčku.*

Řešení. Zkoumaná veličina nabývá hodnot 0, 1, 2. Určíme její pravděpodobnostní funkci a z ní distribuční funkci. Používáme středoškolské matematiky. $p(0) = \frac{1}{20}$, $p(1) = \frac{4}{10}$ a dopočtem do 1, $p(2) = \frac{11}{20}$. Odtud pro distribuční funkci

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 0 \\ \frac{1}{20} & \text{pro } t \in (0, 1] \\ \frac{9}{20} & \text{pro } t \in (1, 2] \\ 1 & \text{pro } t > 2 \end{cases}$$

□

Příklad 5. *(4b.) Náhodný vektor (X, Y) má sdruženou hodnotu pravděpodobnosti danou funkcí*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}xy & \textit{pro } 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \textit{jinak} \end{cases}$$

Určete pravděpodobnost, že platí nerovnost $X^2 > Y$.

Řešení. Hledanou pravděpodobnost získáme integrací sdružené hustoty přes oblast ležící nad parabolou $y = x^2$ v obdélníku $\{[x,y]|1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 2\}$ a dopočtem do jedné. V integrované oblasti podmínka neplatí, je však jednodušší přes ni integrovat. Je tedy

$$p = 1 - \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{x^2}^{2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = 1 - \frac{5}{48} = \frac{43}{48}$$

Pokud si povšimneme, že integrál ze sdružené hustoty přes celý obdélník nedává jedna (jak by měl), můžeme upravit koeficient u sdružené hstoty na $\frac{1}{6}$, pravděpodobnost pak vyjde $\frac{67}{72}$. Tento postřeh však nebyl hodnocen.

□