Písemná práce MB103, FI MUNI, 31.1.2017

Příklad 1. *(2b.) Na křivce* $c(t) = (t^2-2, -2t^2+5, 2t-5)$ *nejděte takový bod, že jím procházející tečna je rovnoběžná s rovinou* $\varrho\colon 3x + y - z = 0$.

Řešení. Chceme, aby tečna byla kolá na normálový vektor roviny, tedy skalární součin s ním by nulový. Řešíme rovnici $3(2t) + 1(-4t) + 2 = 0$, $t = 1$, odpovídající bod $[-1, 3, -3]$. □

Příklad 2. *(5b.) Nalezněte globální extrémy funkce* $f(x, y) = 2x+y$ *na křivce* $y^2+2y+x+1 = 0$ *(nejprve načrtněte křivku v rovině, zejména její průsečíky s osou* x *a* y*).*

Řešení. Obrázek (1b). Převedení fce na fci jedné proměnné $(-2(y + 1)^2 + y)$ a nalezení kritického bodu $[-\frac{1}{16}, -\frac{3}{4}]$ (2b), možno též přímo vyřešením soustavy $(2, 1) = k(1, 2y+2)$. Z vyjádřenní jako funkce jedné proměnné (kvadratická se záporným koeficientem u kvadratického členu) je zřejmé, že se jedná o globální maximum a funkce nemá globální minimum (možno též graficky) (2b). □

Příklad 3. *(3b.) Určete obsah části kružnice* $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$ *ležící v prvním kvadrantu.*

Řešení. Bez integrace je to polovina dané kružnice plus rovnoramenný pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami délek 1 (vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$, $[0, 1]$). Celkem $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$.

□

Příklad 4. *(5b.) Určete distribuční funkci náhodné veličiny* X*, udávající stranu rovnostranného trojúhelníka, je-li jeho obsah rozložen rovnoměrně na intervalu* $[\sqrt{3}, 3]$.

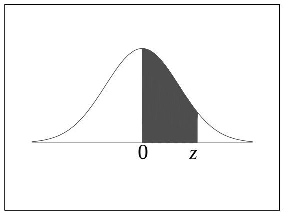
Řešení. Označíme-li Y náhodnou veličinu udávající obsah trojúhelníka, pak $Y = \frac{1}{4}\sqrt{3}X^2$ (0.5b), tedy $\mathcal{H}\ (X) = \{2, 2\sqrt[4]{3}]\}$ (1b). Pak pro t z uvedeného intervalu platí $F_X(t) = P[X < t] = P[\frac{1}{4}\sqrt{3}X^2 < \frac{1}{4}\sqrt{3}t^2] = P[Y < \frac{1}{4}\sqrt{3}t^2] = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$ (2.5b) Celkem

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 2 \\ \frac{\frac{1}{4}\sqrt{3}t^2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} & \text{pro } t \in [2, 2\sqrt[4]{3}] \\ 1 & \text{pro } t > 2\sqrt[4]{3} \end{cases}$$

□

Příklad 5. *(5b.) Pomocí Moivre-Laplaceovy věty a přiložené tabulky odhadněte pravděpodobnost, že při* 19600 *hodech (poctivou) mincí padne něco mezi (včetně)* 9730 *a* 9940 *orly.*

Standard Normal Distribution Table



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998

Gilles Cazelais. Typeset with LaTeX on April 20, 2006.

Řešení. Nechť X udává počet padlých orlů. Pak $X \sim \mathrm{Bi}(19600, \frac{1}{2})$, $EX = 9800$, $\sigma = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 19600} = 70$, $P[9730 \leq X \leq 9940] = P[-1 < \frac{X-9800}{70} < 2] = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0,8185$ $\square$