

Matematika III B – 1. týden
Funkce více proměnných: parciální derivace, křivky,
směrové derivace, diferenciál

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

19.9. - 23.9. 2016

Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce a zobrazení
 - Funkce více proměnných
 - Topologie euklidovských prostorů
 - Křivky v euklidovských prostorech
- 3 Derivace a diferenciál
 - Derivace ve směru vektoru
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce a zobrazení
 - Funkce více proměnných
 - Topologie euklidovských prostorů
 - Křivky v euklidovských prostorech
- 3 Derivace a diferenciál
 - Derivace ve směru vektoru
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce a zobrazení
 - Funkce více proměnných
 - Topologie euklidovských prostorů
 - Křivky v euklidovských prostorech
- 3 Derivace a diferenciál
 - Derivace ve směru vektoru
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z .

To znamená, že funkce f definovaná v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definition

Zobrazení $f(x_1, x_2, \dots, x_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme *funkce více proměnných*. Pro $n = 2$ nebo $n = 3$ často místo číslovaných proměnných používáme písmena x, y, z .

To znamená, že funkce f definovaná v „rovině“ $E_2 = \mathbb{R}^2$ budou značeny

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

a podobně v „prostoru“ $E_3 = \mathbb{R}^3$

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) \in \mathbb{R}.$$

Definiční obor $A \subset \mathbb{R}^n$ – množina, kde je funkce definována.

(Hříčkou pro písemky a úlohy bývá úkol k danému explicitnímu výrazu definujícímu funkci najít co největší definiční obor, na kterém má tato formule smysl.)

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definová vztahem

$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f .

Definition

Graf funkce více proměnných je podmnožina $G_f \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$ definována vztahem

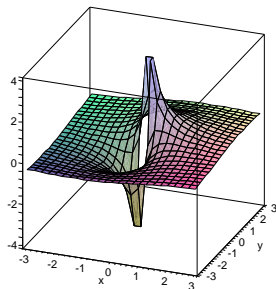
$$G_f = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)); (x_1, \dots, x_n) \in A\},$$

kde A je definiční obor f .

Grafem funkce definované v E_2

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

je plocha na obrázku,
maximálním definičním oborem
je $E_2 \setminus \{(0, 0)\}$.



Parciální derivace

S nástroji pro funkce v jedné proměnné můžeme beze změn pracovat i teď. Prostě budeme derivovat, případně integrovat apod. jen podle jedné zvolené proměnné, zatímco ostatní budou považovány za parametry. (Máme přitom i k dispozici řadu výsledků o chování derivací a integrálů v závislosti na parametrech.)

Definition

Parciální derivací $\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)$ funkce f v bodě (x_1, \dots, x_n) rozumíme obvyklou derivaci $\frac{d}{dx_i} f$ funkce jedné proměnné $x_i \mapsto f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, ve které považujeme ostatní proměnné za parametry.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory.

Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q .

Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Euklidovský prostor E_n je množina bodů (bez volby souřadnic) spolu se zaměřením \mathbb{R}^n . Zaměření je vektorový prostor možných přírůstků, které umíme k bodům prostoru E_n přičítat.

Navíc je na \mathbb{R}^n standardní skalární součin $u \cdot v = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, kde $u = (x_1, \dots, x_n)$ a $v = (y_1, \dots, y_n)$ jsou libovolné vektory. Proto je na E_n dána *metrika*, tj. funkce vzdálenosti $\|P - Q\|$ dvojic bodů P, Q předpisem

$$\|P - Q\|^2 = \|u\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2,$$

kde u je vektor, jehož přičtením k P obdržíme Q .

Např. E_2 je vzdálenost bodů $P_1 = (x_1, y_1)$ a $P_2 = (x_2, y_2)$ dána $\|P_1 - P_2\|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

Trojúhelníková nerovnost pro každé tři body P, Q, R

$$\|P - R\| = \|(P - Q) + (Q - R)\| \leq \|(P - Q)\| + \|(Q - R)\|.$$

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P ; libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina*: její doplněk je uzavřený,

Rozšíření pojmů topologie \mathbb{R} pro body P_i libovolného Euklidovského E_n (opakování z minulého semestru, kde byly diskutovány metrické prostory obecně):

Definition

- *Cauchyovská posloupnost*: $\|P_i - P_j\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j ,
- *konvergentní posloupnost*: $\|P_i - P\| < \epsilon$, pro každé pevně zvolené $\epsilon > 0$ až na konečně mnoho výjimečných hodnot i, j , bod P pak nazýváme *limitou* posloupnosti P_i ,
- *hromadný bod* P množiny $A \subset E_n$: existuje posloupnost bodů v A konvergující k P a vesměs různých od P ,
- *uzavřená množina*: obsahuje všechny své hromadné body,
- *otevřená množina*: její doplněk je uzavřený,
- *otevřené δ -okolí bodu P* : množina
$$\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in E_n; \|P - Q\| < \delta\},$$

Definition

- *hraniční bod* P množiny A : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,

Definition

- *hraniční bod P množiny A* : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* : existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,

Definition

- *hraniční bod P množiny A* : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* : existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,
- *ohraničená množina*: leží celá v nějakém δ -okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),

Definition

- *hraniční bod P množiny A* : každé δ -okolí bodu P má neprázdný průnik s A i s komplementem $E_n \setminus A$,
- *vnitřní bod P množiny A* : existuje δ -okolí bodu P , které celé leží uvnitř A ,
- *ohraničená množina*: leží celá v nějakém δ -okolí některého svého bodu (pro dostatečně velké δ),
- *kompaktní množina*: uzavřená a ohraničená množina.

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 *A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,*
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A,*

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A ,
- 4 A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A ,

Theorem

Pro podmnožiny $A \subset E_n$ v euklidovských prostorech platí:

- 1 A je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému δ -okolí,
- 2 každý bod $a \in A$ je buď vnitřní nebo hraniční,
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem A ,
- 4 A je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v A ,
- 5 A je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in E_n$

Všimněme si, že zatímco limity existují v E_n , derivace křivky v E_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t-t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$

Všimněme si, že zatímco limity existují v \mathbb{E}_n , derivace křivky v \mathbb{E}_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in E_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t-t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál*: $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Všimněme si, že zatímco limity existují v E_n , derivace křivky v E_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in E_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t-t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál*: $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Všimněme si, že zatímco limity existují v E_n , derivace křivky v E_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Definition

Křivka je zobrazení $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}_n$.

Analogicky k funkcím v jedné proměnné:

Definition

- *Limita*: $\lim_{t \rightarrow t_0} c(t) \in \mathbb{E}_n$
- *Derivace*: $c'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{|t-t_0|} \cdot (c(t) - c(t_0)) \in \mathbb{R}^n$
- *Integrál*: $\int_a^b c(t) dt \in \mathbb{R}^n$.

Všimněme si, že zatímco limity existují v \mathbb{E}_n , derivace křivky v \mathbb{E}_n je ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n , integrál má smysl jen pro křivku ve vektorovém prostoru \mathbb{R}^n !

Limity, derivace i integrály lze spočítat po jednotlivých n souřadných složkách v \mathbb{R}^n a stejně se rozpozná i jejich existence.

Riemannův integrál a primitivní funkce pro křivky

Theorem

Je-li $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Riemannův integrál a primitivní funkce pro křivky

Theorem

Je-li $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ křivka spojitá na intervalu $[a, b]$, pak existuje její Riemannův integrál $\int_a^b c(t)dt$. Navíc je křivka

$$C(t) = \int_a^t c(s)ds \in \mathbb{R}^n$$

dobře definovaná, diferencovatelná a platí $C'(t) = c(t)$ pro všechny hodnoty $t \in [a, b]$.

Věta o střední hodnotě dává existenci čísel t_i takových, že

$$c_i(b) - c_i(a) = (b - a) \cdot c'_i(t_i).$$

Tato čísla ale **budou obecně různá**, nemůžeme proto vyjádřit rozdílový vektor koncových bodů $c(b) - c(a)$ jako násobek derivace křivky v jediném bodě.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

Např. v rovině E_2 pro $c(t) = (x(t), y(t))$ takto dostáváme

$$c(b) - c(a) = (x'(\xi)(b - a), y'(\eta)(b - a)) = (b - a) \cdot (x'(\xi), y'(\eta))$$

pro dvě (obecně různé) hodnoty $\xi, \eta \in [a, b]$.

Pořád nám ale úvaha stačí na následující odhad

Theorem

Je-li c křivka v E_n se spojitou derivací na kompaktním intervalu $[a, b]$, pak pro všechny $a \leq s \leq t \leq b$ platí

$$\|c(t) - c(s)\| \leq \sqrt{n} \max_{r \in [a, b]} \|c'(r)\| \cdot |t - s|.$$

Derivace křivky a tečna ke křivce

Derivace zadává **tečný vektor** ke křivce $c : \mathbb{R} \rightarrow E_n$ v bodě $c(t_0) \in E_n$ – vektor $c'(t_0) \in \mathbb{R}^n$ v prostoru zaměření \mathbb{R}^n daný derivací.

Přímka zadaná parametricky $T : c(t_0) + \tau \cdot c'(t_0)$ je **tečna ke křivce** c v bodě t_0 , nezávisí na parametrizaci křivky c .

Plán přednášky

- 1 Literatura
- 2 Funkce a zobrazení
 - Funkce více proměnných
 - Topologie euklidovských prostorů
 - Křivky v euklidovských prostorech
- 3 Derivace a diferenciál
 - Derivace ve směru vektoru
 - Totální diferenciál
 - Tečná nadrovina ke grafu funkce

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)).$$

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)).$$

Speciální volbou přímek ve směru souřadných os dostáváme tzv. **parciální derivace funkce** f , které značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, nebo bez odkazu na samotnou funkci jako operace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ má **derivaci ve směru vektoru** $v \in \mathbb{R}^n$ v bodě $x \in E_n$, jestliže existuje derivace $d_v f(x)$ složeného zobrazení $t \mapsto f(x + tv)$ v bodě $t = 0$, tj.

$$d_v f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + tv) - f(x)).$$

Speciální volbou přímek ve směru souřadných os dostáváme tzv. **parciální derivace funkce** f , které značíme $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, nebo bez odkazu na samotnou funkci jako operace $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Pro funkce v E_2 dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x + t, y) - f(x, y)),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x, y + t) - f(x, y)).$$

Example

Se samotnými parciálními nebo směrovými derivacemi nevystačíme pro dobrou aproximaci chování funkce lineárními výrazy:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } xy = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Example

Se samotnými parciálními nebo směrovými derivacemi nevystačíme pro dobrou aproximaci chování funkce lineárními výrazy:

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } xy = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad h(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{když } y = x^2 \neq 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Žádná z nich neprodukuje všechny hladké křivky procházející bodem $(0, 0)$ na hladké křivky.

Pro g existují obě parciální derivace v $(0, 0)$ a jiné směrové derivace neexistují, zatímco pro h existují všechny směrové derivace v bodě $(0, 0)$ a platí $d_v h(0) = 0$ pro všechny směry v , takže jde o lineární závislost na $v \in \mathbb{R}^2$.

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x , jestliže

- 1 v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v a
- 3 $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x + v) - f(x) - d_v f(x))$.

Následující definice věrně sleduje chování diferenciálu funkcí jedné proměnné:

Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x , jestliže

- 1 v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v a
- 3 $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x + v) - f(x) - d_v f(x))$.

Lineární výraz $d_v f$ (závislý na vektorové proměnné v) nazýváme **diferenciál funkce** f vyčíslený na přírůstku v .

V literatuře se často také říká **totální diferenciál** df funkce f .

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.

Diferenciál v pevném bodě (x_0, y_0) je lineární funkce $df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.

Uvažujme $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ se spojitými parciálními derivacemi.
Diferenciál v pevném bodě (x_0, y_0) je lineární funkce $df : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

na přírůstcích se souřadnicemi danými právě parciálními derivacemi.
Obecněji v případě funkcí více proměnných píšeme obdobně

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \quad (*)$$

a platí:

Theorem

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojitě parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí ().*

Funkce třídy C^1

Definition

Říkáme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je třídy C^1 na množině A , jestliže má ve všech bodech množiny A spojité parciální derivace. Píšeme $f \in C^1(A)$.

Viděli jsme, že funkce v $C^1(A)$ mají na A diferenciál, tj. jsou na A diferencovatelné.

Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $(x_0, y_0) \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

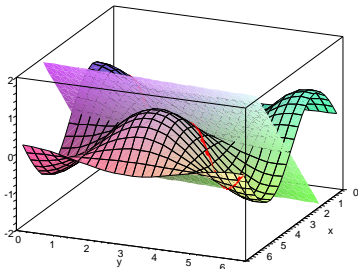
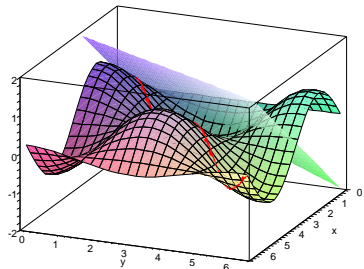
Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f .

Pro $f : E_2 \rightarrow \mathbb{R}$ a pevný bod $(x_0, y_0) \in E_2$ uvažme rovinu v E_3 :

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je to jediná rovina procházející (x_0, y_0) , ve které leží derivace a tedy i tečny všech křivek $c(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$. Říkáme jí **tečná rovina** ke grafu funkce f .

Na obrázku jsou zobrazeny dvě tečné roviny ke grafu funkce $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$. Červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.



Definition

Funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je **diferencovatelná v bodě** x , jestliže

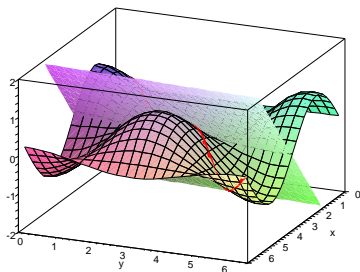
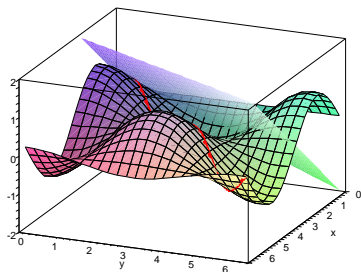
- 1 v bodě x existují všechny směrové derivace $d_v f(x)$, $v \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $d_v f(x)$ je lineární v závislosti na přírůstku v a
- 3 $0 = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{\|v\|} (f(x+v) - f(x) - d_v f(x))$.

Theorem

Nechť $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce n proměnných, která má v okolí bodu $x \in E_n$ spojité parciální derivace. Pak existuje její diferenciál df v bodě x a jeho souřadné vyjádření je dáno rovnicí

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n. \quad (*)$$

Diferenciál zadává tečné (nad)roviny funkce n proměnných.



Graf funkce $f(x, y) = \sin(x) \cos(y)$, červená čára je obrazem křivky $c(t) = (t, t, f(t, t))$.

Diferencovatelná funkce f na E_n v bodě $x \in E_n$ má nulový diferenciál tehdy a jen tehdy, když její složení s libovolnou křivkou procházející tímto bodem zde má stacionární bod. **To ovšem neznamená, že v takovém bodě musí mít f aspoň lokálně buď maximum nebo minimum. Stejně jako u funkcí jedné proměnné můžeme rozhodovat teprve podle derivací vyšších.**

Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .

Obecně pro $f : E_n \rightarrow \mathbb{R}$ je *tečnou rovinou* afinní nadrovina v E_{n+1} .
Tato nadrovina

- 1 prochází bodem $(x, f(x))$
- 2 její zaměření je grafem lineárního zobrazení $df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
tj. diferenciálu v bodě $x \in E_n$.