Matematika III – 4. týden
Integrace podruhé

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

10. října – 14. října 2016

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Zuzana Došlá, Roman Plch, Petr Sojka, Diferenciální počet funkcí více proměnných s programem Maple, MU Brno, 1999, 273 s.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

V praxi mívají optimalizační úlohy často $m + n$ parametrů, které jsou vázány n podmínkami. V našem jazyce diferenciálního počtu tedy hledáme extrémy spojitě diferencovatelné funkce h na množině bodů M zadaných implicitně rovnicí $F(x_1, \ldots, x_{m+n}) = 0$.

V praxi mívají optimalizační úlohy často $m+n$ parametrů, které jsou vázány n podmínkami. V našem jazyce diferenciálního počtu tedy hledáme extrémy spojitě diferencovatelné funkce h na množině bodů M zadaných implicitně rovnicí $F(x_1, \dots, x_{m+n}) = 0$.
Pokud je M ve všech svých bodech grafem hladkého zobrazení v m proměnných, musí být každý extrém $P \in M$ stacionárním bodem, tj. pro každou křivku $c(t) \subset M$ procházející přes $P = c(0)$ musí být $h(c(t))$ extrémem pro tuto funkci jedné proměnné. Proto musí platit

$$\frac{d}{dt}h(c(t))_{|t=0} = d_{c'(0)}h(P) = dh(P)(c'(0)) = 0.$$

Tato vlastnost je ekvivalentní tvrzení, že gradient h leží v normálovém podprostoru (přesněji v jeho zaměření). Takové body $P \in M$ budeme nazývat **stacionární body** funkce H vzhledem k vazbám F.

Normálový prostor k naší množině M je generován řádky Jacobiho matice zobrazení F a stacionární body jsou proto ekvivalentně určeny následujícím tvrzením, kterému se říká **metoda Lagrangeových multiplikátorů**:

Theorem

Nechť $F = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}^n$ je spojitě diferencovatelná v okolí bodu P, $F(P) = 0$ a M je zadána implicitně rovnicí $F(x, y) = 0$ a hodnost matice D^1F v bodě P je n. Pak P je stacionárním bodem spojitě diferencovatelné funkce $h : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ právě, když existují reálné parametry $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ takové, že

$$\operatorname{grad} h = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \cdots + \lambda_n \operatorname{grad} f_n.$$

Všimněme si počtu neznámých a rovnic v tomto algoritmu: gradienty jsou vektory o $m+n$ souřadnicích, tedy požadavek z věty dává $m+n$ rovnic. Jako proměnné máme jednak souřadnice $x_1, \dots, x_{m+n}$ hledaných stacionárních bodů P, ale navíc také n parametrů λ_i v hledané lineární kombinaci. Zbývá však požadavek, že hledaný bod P patří implicitně zadané množině M, což představuje dalších n rovnic. Celkem tedy máme $2n+m$ rovnic pro $2n+m$ proměnných a proto lze očekávat, že řešením bude diskrétní množina bodů P (tj. každý z nich zpravidla bude izolovaným bodem).

Plán přednášky

Integrace funkcí více proměnných

Tak jak jsme motivovali integrování představou o výpočtu plochy pod grafem funkce jedné proměnné, můžeme prakticky stejně postupovat u objemu části trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných. Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.

Integrace funkcí více proměnných

Tak jak jsme motivovali integrování představou o výpočtu plochy pod grafem funkce jedné proměnné, můžeme prakticky stejně postupovat u objemu části trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných. Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.
Co jsou obory integrace?

Integrace funkcí více proměnných

Tak jak jsme motivovali integrování představou o výpočtu plochy pod grafem funkce jedné proměnné, můžeme prakticky stejně postupovat u objemu části trojrozměrného prostoru pod grafem funkce $z = f(x, y)$ dvou proměnných. Místo výběru malých intervalů $[x_i, x_{i+1}]$ dělících celý interval, přes který integrujeme, a přiblížením příslušné části objemu ploškou obdélníku s výškou danou hodnotou funkce f v reprezentantu tohoto intervalu ξ_i, tj. výrazem

$$f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

budeme pracovat s děleními v obou proměnných a hodnotami reprezentujícími výšku grafu nad tímto obdélníčkem v rovině.
Co jsou obory integrace?
Nejjednodušším přístupem je uvažovat pouze obory integrace S, které jsou dány jako součiny intervalů, tj. jsou zadány rozsahem $x \in [a, b]$ a $y \in [c, d]$.
Hovoříme v této souvislosti o **vícerozměrném intervalu**.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastní $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.
Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.

Pokud je S jiná ohraničená množina v $\mathbb{R}^2$, pracujeme místo ní s dostatečně velikou oblastní $[a, b] \times [c, d]$, ale upravíme naši funkci tak, že $f(x, y) = 0$ pro všechny body mimo S.
Definice Riemannova integrálu věrně sleduje náš postup pro jednu proměnnou.
Integrál existuje, jestliže pro každou volbu posloupnosti dělení Ξ (nyní ve všech proměnných zároveň) a reprezentantů jednotlivých krychliček

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \times \ldots \times [z_j, z_{j+1}] \subset \mathbb{R}^n,$$

s maximální velikostí mezi všemi použitými intervaly jdoucí k nule, budou integrální součty

$$S_{\Xi,\xi} = \sum_{i,\ldots,j} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \ldots (z_{j+1} - z_j).$$

konvergovat k jedné hodnotě, kterou zapisujeme

$$\int_S f(x, \ldots, z) dx \ldots dz$$

Pro všechny spojité funkce f opět lze dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek budeme umět snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Pro všechny spojité funkce f opět lze dokázat existenci Riemannova integrálu a tento výsledek budeme umět snadno rozšířit pro „dostatečně spojité“ funkce na „dostatečně rozumných“ oborech integrace.

Definition

Omezenou množinu $S \subset \mathbb{R}^n$ nazýváme **Riemannovsky měřitelnou**[a], jestliže je její charakteristická funkce, definovaná $\chi(x) = 1$ pro $x \in S$ a $\chi(x) = 0$ jinak, Riemannovsky integrovatelná.

[a] Lépe by bylo říkat „měřitelnou pomocí Riemannova integrálu“, této míře se ve skutečnosti říká Jordanova-Peanova míra.

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst, okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Definice Riemannova integrálu sice nedává rozumný návod, jak hodnoty integrálů skutečně vypočíst, okamžitě ale vede k základním vlastnostem Riemannova integrálu (srovnejte s vlastnostmi integrálu v jedné proměnné):

Theorem

Množina Riemannovsky integrovatelných funkcí na vícerozměrném intervalu $S \subset \mathbb{R}^n$ je vektorovým prostorem a Riemannův integrál je na něm lineární formou.
Pokud je obor integrace S zadán jako disjunktní sjednocení konečně mnoha Riemannovsky měřitelných oborů S_i, je integrál funkce f přes S dán součtem integrálů přes obory S_i.

Theorem

Ohraničená funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *s kompaktním nosičem je Riemannovsky integrovatelná, právě když je množina jejích bodů nespojitosti Riemannovsky měřitelnou množinou míry nuly.*

Theorem

Ohraničená funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s kompaktním nosičem je Riemannovsky integrovatelná, právě když je množina jejích bodů nespojitosti Riemannovsky měřitelnou množinou míry nuly.

Theorem

Spojité obrazy Riemannovsky měřitelných množin jsou opět měřitelné.

Theorem

Ohraničená funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s kompaktním nosičem je Riemannovsky integrovatelná, právě když je množina jejích bodů nespojitosti Riemannovsky měřitelnou množinou míry nuly.

Theorem

Spojité obrazy Riemannovsky měřitelných množin jsou opět měřitelné.

Theorem

Riemannova míra množin je nezávislá na volbě ortogonálních souřadnic v E_n.

Plán přednášky

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěmi funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Násobné integrály

Riemannovsky integrovatelné množiny zejména zahrnují případy, kdy lze S definovat pomocí spojité funkční závislosti souřadnic hraničních bodů tak, že pro danou první souřadnici x umíme zadat dvěmi funkcemi rozsah další souřadnice $y \in [\varphi(x), \psi(x)]$, poté rozsah další souřadnice $z \in [\eta(x, y), \zeta(x, y)]$ atd.

Theorem

V případě množiny S zadané jako výše a Riemannovsky integrovatelné funkce f na S je Riemannův integrál vyčíslen formulí

$$\int_S f(x, y, \dots, z) dx \dots dz =$$

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \dots \left(\int_{\eta(x,y,\dots)}^{\zeta(x,y,\dots)} f(x, y, \dots, z) dz \right) \dots dy \right) dx$$

Důkaz.

Výsledek vyplývá docela snadno přímo z definice Riemannova integrálu pomocí konečných součtů. Stačí si pečlivě hlídat vhodné poskládání jednotlivých sčítanců konečných součtů tak, aby vycházely postupně přiblížení integrálů ve vnitřních závorkách. □

Přímým důsledkem je:

Theorem (Fubiniho věta)

Pro vícerozměrný interval $S = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *a spojitou funkci* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *na* S *je násobný integrál*

$$\int_S f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n$$

nezávislý na pořadí ve kterém postupně integraci provádíme.