Matematika III – 8. týden
Pravděpodobnost a náhodné veličiny

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

7. 11. – 11. 11. 2016

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Karel Zvára, Josef Štěpán, Pravděpodobnost a matematická pravděpodobnost statistika, Matfyzpress, 2006, 230pp.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů), Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, Základní statistické metody, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z druhé přednášky prvního semestru.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z druhé přednášky prvního semestru.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Prvky $\omega \in \Omega$ představují jednotlivé **možné výsledky**.

Připomeneme (a trochu zobecníme) pojmy a výsledky z druhé přednášky prvního semestru.

Definition (Náhodné jevy)

Budeme pracovat s neprázdnou pevně zvolenou množinou Ω všech možných výsledků, kterou nazýváme **základní prostor**.
Prvky $\omega \in \Omega$ představují jednotlivé **možné výsledky**.
Systém podmnožin $\mathcal{A}$ základního prostoru se nazývá **jevové pole** a jeho prvky se nazývají **jevy**, jestliže

- $\Omega \in \mathcal{A}$, tj. základní prostor, je jevem,
- je-li $A, B \in \mathcal{A}$, pak $A \setminus B \in \mathcal{A}$, tj. pro každé dva jevy je jevem i jejich množinový rozdíl,
- je-li $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$ nejvýše spočetný systém jevů, pak také jejich sjednocení je jevem, tj. $\cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny $A, B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

- Komplement $A^c = \Omega \setminus A$ jevu A je jevem, který nazýváme *opačný jev* k jevu A.
- Průnik dvou jevů opět jevem, protože pro každé dvě podmnožiny A, $B \subset \Omega$ platí

$$A \setminus (\Omega \setminus B) = A \cap B.$$

Jevové pole je tedy systém podmnožin základního prostoru uzavřený na konečné průniky, spočetná sjednocení a množinové rozdíly. Jednotlivé množiny $A \in \mathcal{A}$ nazýváme **náhodné jevy** (vzhledem k $\mathcal{A}$).

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,

Terminologie připomíná souvislosti s popisem skutečných jevů a jejich statistickým popisem:

- celý základní prostor Ω se nazývá **jistý jev**, prázdná podmnožina $\emptyset \in \mathcal{A}$ se nazývá **nemožný jev**,
- jednoprvkové podmnožiny $\{\omega\} \in \Omega$ se nazývají **elementární jevy**,
- **společné nastoupení jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cap_{i \in I} A_i$, **nastoupení alespoň jednoho z jevů** A_i, $i \in I$, odpovídá jevu $\cup_{i \in I} A_i$,
- $A, B \in \mathcal{A}$ jsou **neslučitelné jevy**, je-li $A \cap B = \emptyset$,
- jev A má za **důsledek** jev B, když $A \subset B$,
- je-li $A \in \mathcal{A}$, pak se jev $B = \Omega \setminus A$ nazývá **opačný jev k jevu** A, píšeme $B = A^c$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.

Definition (Pravděpodobnost)

Pravděpodobnostní prostor je jevové pole $\mathcal{A}$ podmnožin (konečného) základního prostoru Ω, na kterém je definována skalární funkce $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ s následujícími vlastnosti:

- je nezáporná, tj. $P(A) \geq 0$ pro všechny jevy A,
- je aditivní, tj. $P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, pro každý nejvýše spočetný systém po dvou disjunktních jevů,
- pravděpodobnost jistého jevu je 1.

Funkci P nazýváme **pravděpodobností** na jevovém poli $(\Omega, \mathcal{A})$.

Důsledky

Pro všechny jevy platí $P(A^c) = 1 - P(A)$.
Additivnost platí pro jakýkoliv spočetný počet neslučitelných jevů $A_i \subset \Omega$, $i \in I$, tj.

$$P(\cup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i), \text{ kdykoliv je } A_i \cap A_j = \emptyset,\ i \neq j,\ i, j \in I.$$

Připomeňme si klasickou konečnou pravděpodobnost.

Připomeňme si klasickou konečnou pravděpodobnost.

Definition

Nechť Ω je konečný základní prostor a nechť jevové pole $\mathcal{A}$ je právě systém všech podmnožin v Ω. **Klasická pravděpodobnost** je pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ s pravděpodobnostní funkcí $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Zjevně takto zadaná funkce skutečně definuje pravděpodobnost.

Peterburgský paradox (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina:

Peterburgský paradox (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina: Návštěvník zaplatí vklad C a poté hází mincí. Je-li T počet hodů potřebných k první hlavě, pak obdrží výhru 2^T. Jaká je „fér hodnota“ pro vklad C?

Peterburgský paradox (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina: Návštěvník zaplatí vklad C a poté hází mincí. Je-li T počet hodů potřebných k první hlavě, pak obdrží výhru 2^T. Jaká je „fér hodnota“ pro vklad C?
Pravděpodobnost, že padne hlava je u férové mince $1/2$, je proto $P(T = k) = 2^{-k}$. Pravděpodobnost, že po nějakém konečném počtu hodů hra skončí je dána součtem $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Proto je pravděpodobnost jevu, že stále padá orel nulová.
Sečteme-li všechny pravděpodobnosti výsledků vynásobených výhrami 2^k, dostaneme $\sum_1^{\infty} 1 = \infty$. Zdá se proto, že se vyplatí vložit i velký vklad...

Peterburgský paradox (Bernoulli, 1738)

Typický příklad klasické pravděpodobnosti jsou jevy související s házením mincí. Představme si následující pravidla kasina: Návštěvník zaplatí vklad C a poté hází mincí. Je-li T počet hodů potřebných k první hlavě, pak obdrží výhru 2^T. Jaká je „fér hodnota“ pro vklad C?

Pravděpodobnost, že padne hlava je u férové mince $1/2$, je proto $P(T = k) = 2^{-k}$. Pravděpodobnost, že po nějakém konečném počtu hodů hra skončí je dána součtem $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Proto je pravděpodobnost jevu, že stále padá orel nulová.

Sečteme-li všechny pravděpodobnosti výsledků vynásobených výhrami 2^k, dostaneme $\sum_1^{\infty} 1 = \infty$. Zdá se proto, že se vyplatí vložit i velký vklad...

Ve skutečnosti simulací hry zjistíme, že nezávisle na počtu pokusů se prakticky všechny výhry budou pohybovat v rozmezí T do 6. Důvodem je, že vysoké výhry jsou velice nepravděpodobné a proto je při reálných úvahách nelze brát vážně.

Podmíněná pravděpodobnost

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěmi kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?“. Připomeneme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

Definition

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Podmíněná pravděpodobnost** $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Definice odpovídá požadavku, že jevy A a H nastanou zároveň, za předpokladu, že A nastal s pravděpodobností $P(A \cap H)/P(A)$.

Podmíněná pravděpodobnost

Obvyklé je také klást dotazy s dodatečnou podmínkou. Např. „jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěmi kostkami padly dvě pětky, je-li součet hodnot deset?“. Připomeneme, že formalizovat takové úvahy umíme následovně.

Definition

Nechť H je jev s nenulovou pravděpodobností v jevovém poli $\mathcal{A}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. **Podmíněná pravděpodobnost** $P(A|H)$ jevu $A \in \mathcal{A}$ vzhledem k hypotéze H je definována vztahem

$$P(A|H) = \frac{P(A \cap H)}{P(H)}.$$

Definice odpovídá požadavku, že jevy A a H nastanou zároveň, za předpokladu, že A nastal s pravděpodobností $P(A \cap H)/P(A)$.
Je také vidět přímo z definice, hypotéza H a jev A jsou nezávislé tehdy a jen tehdy, je-li $P(A) = P(A|H)$.

Bayesovy věty

Přepsáním formule pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Theorem (Bayesovy věty)

Pro pravděpodobnost jevů A a B platí

1. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.
2. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')}$.

Bayesovy věty

Přepsáním formule pro podmíněnou pravděpodobnost dostáváme

$$P(A \cap B) = P(B \cap A) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

Theorem (Bayesovy věty)

Pro pravděpodobnost jevů A a B platí

1. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.
2. $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')}$.

Důkaz.

První tvrzení je přepsáním předchozí formule, druhé z prvého plyne doszením $P(B) = P(A)P(B|A) + P(A')P(B|A')$. $\square$

Příklad – testování

Předpokládejme, že předpokladem přijetí studentů na univerzitu jsou testy způsobilosti ke studiu. Inteligentní osoba v něm má 99% úspěšnost. Zároveň předpokládejme, že úspěšnost neinteligentních osob je 0.5%.

Příklad – testování

Předpokládejme, že předpokladem přijetí studentů na univerzitu jsou testy způsobilosti ke studiu. Inteligentní osoba v něm má 99% úspěšnost. Zároveň předpokládejme, že úspěšnost neinteligentních osob je 0.5%.
S jakou pravděpodobností je náhodně vybraný student/ka univerzity inteligentní, jestliže je v populaci je p promile inteligentních osob (tj. p osob z tisíce považujeme za inteligentní).

Příklad – testování

Předpokládejme, že předpokladem přijetí studentů na univerzitu jsou testy způsobilosti ke studiu. Inteligentní osoba v něm má 99% úspěšnost. Zároveň předpokládejme, že úspěšnost neinteligentních osob je 0.5%.

S jakou pravděpodobností je náhodně vybraný student/ka univerzity inteligentní, jestliže je v populaci je p promile inteligentních osob (tj. p osob z tisíce považujeme za inteligentní).

Označme A jev, že je daná osoba je inteligentní, a B jev, že prošla testem. Dle Bayesovy věty je hledaná pravděpodobnost

$$P(A|B) = \frac{p/1000 \cdot 99/100}{p/1000 \cdot 99/100 + (1000 - p)/1000 \cdot 5/1000}$$

Jestliže zvolíme za p nějaké konkrétní četnosti, dostaneme příslušné očekávatelné spolehlivosti testu. V následující tabulce je spočten výsledek pro několik p:

p	500	100	10	1	0.1
$P(A\|B)$	0.99	0,96	0.67	0.17	0.02

Pokud stejné číselné zadání použijeme pro screening některé nemoci, řekněme HIV pozitivity, dostáváme hrozné výsledky!

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.
Evidentně prostý výběr náhodné osoby a použití jediného testu, byť velmi citlivého, specifického a účinného, nejsou vhodné ani na otestování skutečného stavu populace, ani na preventivní vyšetření jednotlivců, pokud nemáme další podpůrné informace a lepší nástroje.

Výsledek asi neodpovídá naší intuici a může se zdát šokující ve vztahu k použití takovýchto testů.
Evidentně prostý výběr náhodné osoby a použití jediného testu, byť velmi citlivého, specifického a účinného, nejsou vhodné ani na otestování skutečného stavu populace, ani na preventivní vyšetření jednotlivců, pokud nemáme další podpůrné informace a lepší nástroje.
Právě matematická statistika dává nástroje na kvalifikovanější postupy v medicínské i průmyslové diagnostice, ekonomických modelech, vyhodnocování experimentálních dat atd.

Plán přednášky

Vraťme se k jednoduchému a názornému příkladu statistik kolem výsledků studentů[1] v daném předmětu. Je a není podobný klasické pravděpodobnosti a s ní související statistice při házení kostkou.

[1] Myslíme samozřejmě na „studenty a studentky", pro zestručnění textu ale používám podobně jako v legislativních textech bezpohlavní označní „student"

Vraťme se k jednoduchému a názornému příkladu statistik kolem výsledků studentů[1] v daném předmětu. Je a není podobný klasické pravděpodobnosti a s ní související statistice při házení kostkou. Na jedné straně jsme připustili pouze konečný počet možných bodových hodnocení (celá čísla od 0 do 20), zároveň ale není patrně vhodné představovat si výsledky jednotlivých studentů jako analogii nezávislého házení kostkou (to by byla skutečně divně vedená přednáška).

[1] Myslíme samozřejmě na „studenty a studentky", pro zestručnění textu ale používám podobně jako v legislativních textech bezpohlavní označní „student"

Vraťme se k jednoduchému a názornému příkladu statistik kolem výsledků studentů[1] v daném předmětu. Je a není podobný klasické pravděpodobnosti a s ní související statistice při házení kostkou. Na jedné straně jsme připustili pouze konečný počet možných bodových hodnocení (celá čísla od 0 do 20), zároveň ale není patrně vhodné představovat si výsledky jednotlivých studentů jako analogii nezávislého házení kostkou (to by byla skutečně divně vedená přednáška).

Místo toho máme na základním prostoru Ω všech studentů definovánu funkci bodového ohodnocení $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Je to typický příklad **náhodné veličiny**.

S každou náhodnou veličinou potřebujeme umět pracovat s vhodnou množinou jevů. Zpravidla požadujeme, abychom mohli pracovat s pravděpodobnostmi příslušnosti hodnoty X do předem zadaného intervalu.

[1] Myslíme samozřejmě na „studenty a studentky", pro zestručnění textu ale používám podobně jako v legislativních textech bezpohlavní označní „student"

Na prostoru $\mathbb{R}^k$ uvažujme nejmenší jevové pole $\mathcal{B}$ obsahující všechny k–rozměrné intervaly. Množinám v $\mathcal{B}$ říkáme **Borelovské množiny** na $\mathbb{R}^k$.

Na prostoru $\mathbb{R}^k$ uvažujme nejmenší jevové pole $\mathcal{B}$ obsahující všechny k–rozměrné intervaly. Množinám v $\mathcal{B}$ říkáme **Borelovské množiny** na $\mathbb{R}^k$.

Definition (Náhodné veličiny a distribuční funkce)

Náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je taková funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$, že vzor $X^{-1}(B)$ patří do $\mathcal{A}$ pro každou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ na $\mathbb{R}$.

Na prostoru $\mathbb{R}^k$ uvažujme nejmenší jevové pole $\mathcal{B}$ obsahující všechny k–rozměrné intervaly. Množinám v $\mathcal{B}$ říkáme **Borelovské množiny** na $\mathbb{R}^k$.

Definition (Náhodné veličiny a distribuční funkce)

Náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je taková funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$, že vzor $X^{-1}(B)$ patří do $\mathcal{A}$ pro každou Borelovskou množinu $B \in \mathcal{B}$ na $\mathbb{R}$.
Náhodný vektor $(X_1, \ldots, X_k)$ na $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je k–tice náhodných veličin.

Definice náhodné veličiny zajišťuje, že pro všechny $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ existuje pravděpodobnost $P(a \leq X < b)$, kde používáme stručné značení pro jev $A = (\omega \in \Omega;\ a \leq X(\omega) < b))$.

Definition

Distribuční funkcí náhodné veličiny X je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná pro všechny $x \in \mathbb{R}$ vztahem

$$F(x) = P(X < x).$$

Definice náhodné veličiny zajišťuje, že pro všechny $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$ existuje pravděpodobnost $P(a \leq X < b)$, kde používáme stručné značení pro jev $A = (\omega \in \Omega;\ a \leq X(\omega) < b))$.

Definition

Distribuční funkcí náhodné veličiny X je funkce $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná pro všechny $x \in \mathbb{R}$ vztahem

$$F(x) = P(X < x).$$

Distribuční funkcí náhodného vektoru $(X_1, \dots, X_k)$ je funkce $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definovaná pro všechny $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ vztahem

$$F(x) = P(X_1 < x_1 \wedge \cdots \wedge X_k < x_k).$$

Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že pro náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nabývá jen konečně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce** $f(x)$ taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně $\sum_1^n f(x_i) = 1$.

Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že pro náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nabývá jen konečně mnoha hodnot $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce** $f(x)$ taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně $\sum_1^n f(x_i) = 1$.
Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.

Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že pro náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nabývá jen konečně mnoha hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce** $f(x)$ taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně $\sum_1^n f(x_i) = 1$.
Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.
Každá náhodná veličina definovaná pro klasickou pravděpodobnost je diskrétní.

Diskrétní náhodné veličiny

Předpokládejme, že pro náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nabývá jen konečně mnoha hodnot $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Pak existuje tzv. **pravděpodobnostní funkce** $f(x)$ taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Evidentně $\sum_1^n f(x_i) = 1$.
Takové náhodné veličině se říká **diskrétní**.
Každá náhodná veličina definovaná pro klasickou pravděpodobnost je diskrétní. Obdobně lze definici pravděpodobnostní funkce rozšířit na veličiny se spočetně mnoha hodnotami (pracujeme pak s absolutně konvergentními nekonečnými řadami :-)

Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny X nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím nástrojů diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu** $f(x)$ **pravděpodobnosti** pro X si představíme jako

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x)dx.$$

Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny X nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím nástrojů diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu** $f(x)$ **pravděpodobnosti** pro X si představíme jako

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x)dx.$$

To znamená, že chceme pro $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (*)$$

Spojité náhodné veličiny

I když hodnoty náhodné veličiny X nejsou diskrétní, můžeme postupovat podobně s užitím nástrojů diferenciálního a integrálního počtu. Intuitivně lze uvažovat takto: **hustotu** $f(x)$ **pravděpodobnosti** pro X si představíme jako

$$P(x \leq X < x + dx) = f(x)dx.$$

To znamená, že chceme pro $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a \leq X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (*)$$

Definition

Náhodná veličina X, pro kterou existuje její **hustota pravděpodobnosti** splňující $(*)$, se nazývá **spojitá**.

Theorem

Pro každou náhodnou veličinu X má její dstribuční funkce $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ následující vlastnosti

1. *F je neklesající funkce;*
2. *F má v každém bodě $x\in\mathbb{R}$ limitu zleva i limitu zprava;*
3. *F je zleva spojitá;*
4. *v nevlastních bodech má F limity*

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1, \qquad \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0; \tag{1}$$

5. *pravděpodobnost, že X nabývá právě hodnotu x je dána*

$$P(X = x) = \lim_{y\to x_+} F(y) - F(x). \tag{2}$$

6. *Distribuční funkce náhodné veličiny má vždy nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.*

Důkaz věty je založený na pozorování vyplývajícím vcelku jednoduše z axiomů pravděpodobnosti:

Theorem

Uvažme pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *a neklesající řetězec jevů* $A_1 \subset A_2 \subset \dots$. *Pak platí*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i).$$

Pokud je naopak $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, *potom platí*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i \to \infty} P(A_i).$$

Plán přednášky

Diskrétní náhodné veličiny

Jestliže náhodná veličina X na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ nabývá jen konečně nebo spočetně mnoha hodnot $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R}$, pak existuje **pravděpodobnostní funkce** $f(x)$ taková, že

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) & x = x_i \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Spojité náhodné veličiny

Hustota $f(x)$ **pravděpodobnosti** pro náhodnou veličinu X je funkce splňující pro $-\infty \leq a \leq b \leq \infty$

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx. \qquad (*)$$

Náhodná veličina X, pro kterou existuje její **hustota pravděpodobnosti** splňující $(*)$, se nazývá **spojitá**.

Degenerované a alternativní rozdělení.

Degenerované rozdělení $\mathrm{D}(\mu)$ odpovídá konstantní hodnotě $X = \mu$. Distribuční funkce F_X a pravděpodobnostní funkce f_X jsou tedy rovny

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \mu \\ 1 & t > \mu \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} 1 & t = \mu \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} .$$

Degenerované a alternativní rozdělení.

Degenerované rozdělení $\mathrm{D}(\mu)$ odpovídá konstantní hodnotě $X = \mu$. Distribuční funkce F_X a pravděpodobnostní funkce f_X jsou tedy rovny

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \mu \\ 1 & t > \mu \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} 1 & t = \mu \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Alternativní rozdělení $\mathrm{A}(p)$ popisuje pokus s pouze dvěma možnými výsledky, kterým budeme říkat zdar a nezdar. Náhodné veličině X pro určitost přiřadíme hodnotu 0 pro nezdar a 1 pro zdar. Pokud má zdar pravděpodobnost p, pak nezdar musí mít pravděpodobnost $1 - p$. Jsou tedy distribuční a pravděpodobnostní funkce tvaru:

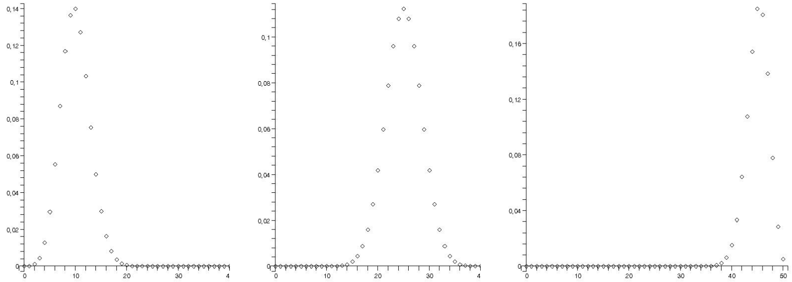
$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 - p & 0 < t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases} \qquad f_X(t) = \begin{cases} p & t = 1 \\ 1 - p & t = 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Binomické rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p)$

odpovídá n–krát nezávisle opakovanému pokusu popsanému alternativním rozdělením, přičemž naše náhodná veličina měří počet zdarů. Je tedy zjevné, že pravděpodobnostní funkce bude mít nenulové hodnoty právě v celých číslech $0, \dots, n$ odpovídajícím celkovému počtu úspěchů v pokusech (a nezáleží nám na pořadí). Je tedy

$$f_X(t) = \begin{cases} \binom{n}{t} p^t (1-p)^{1-t} & t \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Na obrázku jsou pravděpodobnostní funkce pro Bi(50, 0.2), Bi(50, 0.5) a Bi(50, 0.9). Rozdělení pravděpodobnosti dobře odpovídá intuici, že nejvíce výsledků bude blízko u hodnoty np:



S binomickým rozdělením se potkáváme velice často v praktických úlohách. Jednou z nich je popis náhodné veličiny, která popisuje počet X předmětů v jedné zvolené přihrádek z n možných, do nichž jsme náhodně rozdělili r předmětů.
Umístění kteréhokoliv předmětu do pevně zvolené přihrádky má pravděpodobnost $1/n$ (každá z nich je stejně pravděpodobná). Zjevně tedy bude pro jakýkoliv počet $k = 0, \dots, r$

$$P(X = k) = \binom{r}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k} = \binom{r}{k} \frac{(n-1)^{r-k}}{n^r},$$

jde proto o rozložení X typu $\mathrm{Bi}(r, 1/n)$.

Jestliže nám bude vzrůstat počet přihrádek n společně s počtem předmětů r_n tak, že v průměru nám na každou přihrádku bude připadat (přibližně) stejný počet prvků λ, můžeme dobře vyjádřit chování našeho rozdělení veličin X_n při limitním přechodu $n \to \infty$:

Jestliže nám bude vzrůstat počet přihrádek n společně s počtem předmětů r_n tak, že v průměru nám na každou přihrádku bude připadat (přibližně) stejný počet prvků λ, můžeme dobře vyjádřit chování našeho rozdělení veličin X_n při limitním přechodu $n \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) &= \lim_{n\to\infty} \binom{r_n}{k} \frac{(n-1)^{r_n-k}}{n^{r_n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{r_n(r_n-1)\dots(r_n-k+1)}{(n-1)^k} \frac{1}{k!} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{r_n} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{-\frac{r_n}{n}}{r_n}\right)^{r_n} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}
\end{aligned}
$$

protože obecně funkce $(1+x/n)^n$ konvergují stejnoměrně k funkci e^x na každém omezeném intervalu v $\mathbb{R}$.
To dává **Poissonovo rozdělení** $\mathrm{Po}(\lambda)$.

Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení Po(λ) popisuje např. události, které se vyskytují náhodně v čase a přitom pravděpodobnost výskytu v následujícím časovém intervalu o jednotkové délce nezávisí na předchozí historii a je rovna stále stejné hodnotě λ.
V praxi jsou takové procesy spojeny např. s poruchovostí strojů a zařízení.

Poissonovo rozdělení

Poissonovo rozdělení $\mathrm{Po}(\lambda)$ popisuje např. události, které se vyskytují náhodně v čase a přitom pravděpodobnost výskytu v následujícím časovém intervalu o jednotkové délce nezávisí na předchozí historii a je rovna stále stejné hodnotě λ.
V praxi jsou takové procesy spojeny např. s poruchovostí strojů a zařízení.

Theorem (Poissonova věta)

Jsou-li $X_n \sim \mathrm{Bi}(n, p_n)$ *a* $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$ *je konečná, pak*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = P(X = k),$$

kde $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$.

Příklady spojitých rozdělení

Nejjednodušší je tzv. **rovnoměrné rozdělení**. Jestliže chceme, aby pravděpodobnost každé hodnoty v předem daném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ byla stejná, pak hustota f_X našeho rozdělení náhodné veličiny X má být konstantní. Pak ovšem jsou pro libovolná reálná čísla $-\infty < a < b < \infty$ jen jediné možné hodnoty

$$f_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{1}{b-a} & t \in (a, b) \\ 0 & t \geq b, \end{cases} \qquad F_X(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & t \in (a, b) \\ 1 & t \geq b. \end{cases}$$

Exponenciální rozdělení $\mathrm{ex}(\lambda)$

je dalším rozdělením, které je snadno určeno požadovanými vlastnostmi náhodné veličiny. Předpokládejme, že sledujeme výskyt náhodného jevu tak, že výskyty v nepřekrývajících se intervalech jsou nezávislé. Je-li tedy $P(t)$ pravděpodobnost, že jev **nenastane** během intervalu délky t, pak nutně $P(t+s) = P(t)P(s)$ pro všechna $t, s > 0$. Předpokládejme navíc diferencovatelnost funkce P a $P(0) = 1$. Pak $\ln P(t+s) = \ln P(t) + \ln P(s)$.

Exponenciální rozdělení $\mathrm{ex}(\lambda)$

je dalším rozdělením, které je snadno určeno požadovanými vlastnostmi náhodné veličiny. Předpokládejme, že sledujeme výskyt náhodného jevu tak, že výskyty v nepřekrývajících se intervalech jsou nezávislé. Je-li tedy $P(t)$ pravděpodobnost, že jev **nenastane** během intervalu délky t, pak nutně $P(t+s) = P(t)P(s)$ pro všechna $t, s > 0$. Předpokládejme navíc diferencovatelnost funkce P a $P(0) = 1$. Pak $\ln P(t+s) = \ln P(t) + \ln P(s)$. Limitním přechodem:

$$\lim_{s \to 0_+} \frac{\ln P(t+s) - \ln P(t)}{s} = (\ln P)'(0) = -\lambda.$$

Odtud vyplývá diferenciální rovnice

$$(\ln P(t))' = -\lambda.$$

Odtud dostáváme $\ln P(t) = -\lambda t + C$ a počáteční podmínka dává jediné řešení

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Všimněme si, že z definice našich objektů vyplývá, že $\lambda > 0$.

Odtud dostáváme $\ln P(t) = -\lambda t + C$ a počáteční podmínka dává jediné řešení

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Všimněme si, že z definice našich objektů vyplývá, že $\lambda > 0$.
Uvažme náhodnou veličinu X udávající okamžik, kdy náš jev poprvé **nastane**. Zřejmě tedy je distribuční funkce rozdělení pro X dána

$$F_X(t) = 1 - P(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

Je vidět, že je to rostoucí funkce s hodnotami mezi nulou a jedničkou a správnými limitami v $\pm\infty$.
Hustotu tohoto rozdělení dostaneme derivováním distribuční funkce, tj.

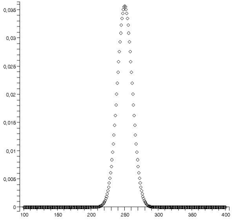
$$f_X = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0. \end{cases}$$

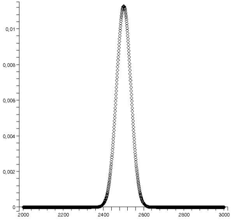
Normální rozdělení

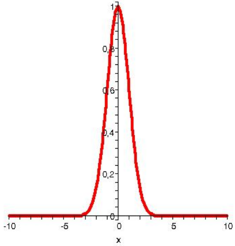
je ze všech nejdůležitější.

Normální rozdělení

je ze všech nejdůležitější.
Jestliže v binomiálním rozdělení zachováme konstatní úspěšnost p, ale budeme přidávat počet pokusů n, bude pravděpodobnostní funkce kupodivu pořád mít podobný tvar (i když jiné rozměry). Na obrázku při rostoucím n se budou vynesené bodové hodnoty slévat do křivky, pro hodnoty $\mathrm{Bi}(500, 0.5)$ a $\mathrm{Bi}(5000, 0.5)$ je výsledek vidět na obrázku níže. Třetí křivka na obrázku je grafem funkce $f(x) = e^{-x^2/2}$.







Hledáme-li podobné spojité rozdělení, potřebovali bychom spočíst $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$ což není pomocí elementárních funkcí možné. Je však docela snadné ověřit (výpočtem $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy$), že příslušný nevlastní integrál konverguje k hodnotě

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Odtud vyplývá, že možná hustota rozdělení náhodného rozdělení může být

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Hledáme-li podobné spojité rozdělení, potřebovali bychom spočíst $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$ což není pomocí elementárních funkcí možné. Je však docela snadné ověřit (výpočtem $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,dxdy$), že příslušný nevlastní integrál konverguje k hodnotě

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx = \sqrt{2\pi}.$$

Odtud vyplývá, že možná hustota rozdělení náhodného rozdělení může být

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Rozdělení s touto hustotou se nazývá **normální rozdělení** $\mathrm{N}(0,1)$. Příslušnou distribuční funkci

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,dx$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, přesto se s ní numericky běžně počítá (pomocí tabulek nebo softwarových aplikací).

Hledáme-li podobné spojité rozdělení, potřebovali bychom spočíst $\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$ což není pomocí elementárních funkcí možné. Je však docela snadné ověřit (výpočtem $\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\, dxdy$), že příslušný nevlastní integrál konverguje k hodnotě

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}.$$

Odtud vyplývá, že možná hustota rozdělení náhodného rozdělení může být

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Rozdělení s touto hustotou se nazývá **normální rozdělení** $\mathrm{N}(0,1)$. Příslušnou distribuční funkci

$$F_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx$$

nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí, přesto se s ní numericky běžně počítá (pomocí tabulek nebo softwarových aplikací). Hustotě f_X se také často říká **Gaussova křivka**.