Matematika III – 9. týden
Náhodné vektory, číselné charakteristiky náhodných veličin

Jan Slovák

Masarykova univerzita
Fakulta informatiky

21.-25. 11. 2016

Obsah přednášky

Plán přednášky

Kde je dobré číst?

- Karel Zvára, Josef Štěpán, Pravděpodobnost a matematická pravděpodobnost statistika, Matfyzpress, 2006, 230pp.
- J. Slovák, M. Panák, M. Bulant, Matematika drsně a svižně, Muni Press, Brno 2013, v+773 s., elektronická edice `www.math.muni.cz/Matematika_drsne_svizne`
- Marie Budíková, Štěpán Mikoláš, Pavel Osecký, Teorie pravděpodobnosti a matematická statistika (sbírka příkladů), Masarykova univerzita, 3. vydání, 2004, 117 stran, ISBN 80-210-3313-4.
- Marie Budíková, Tomáš Lerch, Štěpán Mikoláš, Základní statistické metody, Masarykova univerzita, 2005, 170 stran, ISBN 80-210-3886-1.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Plán přednášky

Obdobně k náhodným veličinám definujeme distribuční funkce a hustotu a pravděpodobnostní funkci pro spojité a diskrétní náhodné vektory. Hovoříme také o **simultánních (sdružených) pravděpodobnostních funkcích a hustotách**.
Pro dvě proměnné (vektor (X, Y) náhodných veličin):

$$f(x, y) = \begin{cases} P(X = x_i \wedge Y = y_j) & x = x_i \wedge y = y_j \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

u diskrétních a pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$ pro spojité:

$$F(b, a) = P(-\infty < X < b, \infty < Y < a) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f(x, y) dxdy.$$

Marginální rozložení

pro jednu z proměnných obdržíme tak, že přes ostatní posčítáme nebo zintegrujeme. Např. u diskrétních vektorových veličin (X, Y) tvoří jevy $(X = x_i, Y = y_j)$ pro všechny možné hodnoty x_i a y_j s nenulovými pravděpodobnostmi pro X a Y úplný systém jevů pro vektor (X, Y) a dostáváme vztah:

$$P(X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X = x_i, Y = y_j)$$

mezi **marginálním rozdělením pravděpodobnosti** náhodné veličiny X a **sdruženým rozdělením pravděpodobnosti** náhodného vektoru (X, Y).

Náhodné veličiny X a Y jsou **stochasticky nezávislé**, jestliže jejich sdružená distribuční funkce splňuje

$$F(x, y) = G(x) \cdot H(y),$$

kde G a H jsou distribuční funkce veličin X a Y.

Plán přednášky

Definition

Pro danou spojitou funkci $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a náhodnou veličinu X máme dánu také náhodnou veličinu $Y = \psi(X)$. Nazýváme ji **funkcí náhodné veličiny** X.
V případě náhodného vektoru $(X_1, \dots, X_n)$ a funkce $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hovoříme o funkci $Y = \psi(X_1, \dots, X_n)$ náhodného vektoru.

Požadavek spojitosti ψ zaručuje, že je Y opět náhodnou veličinou podle naší definice, protože vzor borelovské množiny ve spojitém zobrazení je opět borelovská množina.
Obecněji můžeme právě tento požadavek na ψ vztáhnout pro každý speciální případ veličiny či vektoru a definovat tak pojem funkce z náhodné veličiny či vektoru obecněji.

Nejjednodušší funkcí po konstantách je afinní závislost

$$\psi(X) = a + bX$$

s konstantami $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.
Je-li $f_X(x)$ pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny s diskrétním rozdělením, snadno se vypočte

$$f_{\psi(X)}(y) = P(\psi(X) = y) = \sum_{\psi(x_i)=y} f(x_i).$$

V případě afinní závislosti $Y = a + bX$ je proto pravděpodobnostní funkce nenulová právě v bodech $y_i = ax_i + b$.
Např. součet n nezávislých náhodných veličin s alternativním rozdělením $A(p)$ je veličina s binomiální rozdělení $Bi(n, p)$.

Podobně můžeme přepočíst distribuční funkci rozdělení funkce ze spojité náhodné veličiny, či vektoru. Např. má-li Z s normální rozdělení N$(0,1)$, pak veličiny $Y = \mu + \sigma Z$ budou mít distribuční funkci

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad \{\text{substituce } x = \mu + \sigma z\}$$
$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Takovému rozdělení říkáme také *normální*, píšeme $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Podobně můžeme přepočíst distribuční funkci rozdělení funkce ze spojité náhodné veličiny, či vektoru. Např. má-li Z s normální rozdělení $\mathrm{N}(0,1)$, pak veličiny $Y = \mu + \sigma Z$ budou mít distribuční funkci

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \quad \{\text{substituce } x = \mu + \sigma z\}$$
$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Takovému rozdělení říkáme také *normální*, píšeme $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Se součty nezávislých spojitých veličin X a Y s hustotami f_X a f_Y je to složitější. Přímým výpočtem spočteme distribuční funkci náhodné promnné $V = X + Y$.

$$F_V(u) = \int_{x+y<u} f_X(x) f_Y(y)\, dx dy = \int_{-\infty}^{u} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(v-x)\, dx \right) dv.$$

Je tedy sdruženou hustotou součtu dvou nezávislých veličin právě konvoluce jejich hustot $f_V = f_X * f_Y$.

Plán přednášky

Střední hodnota

Nechť X je náhodná veličina s diskrétním rozdělením. Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$ konverguje absolutně (zejména tedy pro všechny X s konečně mnoha možnými hodnotami x_i), pak její součet $\mathrm{E}\,X$ nazýváme **střední hodnotou** X.

Střední hodnota

Nechť X je náhodná veličina s diskrétním rozdělením. Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$ konverguje absolutně (zejména tedy pro všechny X s konečně mnoha možnými hodnotami x_i), pak její součet $\mathrm{E}\,X$ nazýváme **střední hodnotou** X.

Je-li X náhodná veličina se spojitým rozdělením s hustotou $f(x)$ a nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$ konverguje absolutně, pak jeho hodnota $\mathrm{E}\,X$ se nazývá **střední hodnota** X.

Střední hodnota

Nechť X je náhodná veličina s diskrétním rozdělením. Jestliže řada $\sum_{k=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$ konverguje absolutně (zejména tedy pro všechny X s konečně mnoha možnými hodnotami x_i), pak její součet $\mathrm{E}\,X$ nazýváme **střední hodnotou** X.

Je-li X náhodná veličina se spojitým rozdělením s hustotou $f(x)$ a nevlastní integrál $\int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ konverguje absolutně, pak jeho hodnota $\mathrm{E}\,X$ se nazývá **střední hodnota** X.

Je tedy $\mathrm{E}\,X = np$, je-li $X \sim \mathrm{Bi}(n, p)$, zatímco pro rovnoměrné rozdělení na intervalu (a, b) dostaneme dle očekávání

$$\mathrm{E}\,X = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b - a} = \frac{1}{2}(a + b).$$

Vlastnosti střední hodnoty

Theorem

Uvažme náhodné veličiny X, Y, skaláry a, $b \in \mathbb{R}$, náhodný vektor $W = (X_1, \dots, X_n)$ a čtvercovou skalární matici B s n řádky.

- *Pro konstantní náhodnou veličinu $X = a \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{E}\, a = a$.*
- $\mathrm{E}(a + bX) = a + b\,\mathrm{E}\,X$.
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}\,X + \mathrm{E}\,Y$.
- $\mathrm{E}(a + BX) = a + B(\mathrm{E}\,X)$.

Vlastnosti střední hodnoty

Theorem

Uvažme náhodné veličiny X, Y, skaláry $a, b \in \mathbb{R}$, náhodný vektor $W = (X_1, \dots, X_n)$ a čtvercovou skalární matici B s n řádky.

- *Pro konstantní náhodnou veličinu $X = a \in \mathbb{R}$ je $\mathrm{E}\, a = a$.*
- $\mathrm{E}(a + bX) = a + b\,\mathrm{E}\, X$.
- $\mathrm{E}(X + Y) = \mathrm{E}\, X + \mathrm{E}\, Y$.
- $\mathrm{E}(a + BX) = a + B(\mathrm{E}\, X)$.

Theorem

Jsou-li veličiny X a Y nezávislé, pak $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}\, X\, \mathrm{E}\, Y$.

Rozptyl

Další charakteristika popisuje, jak moc se dá čekat, že se hodnoty náhodné veličiny „hemží“ kolem nějaké hodnoty.

Definition

Nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou. Pak definujeme **rozptyl** veličiny X výrazem

$$\operatorname{var} X = \mathrm{E}(X - \mathrm{E}\, X)^2,$$

pokud taková konečná hodnota existuje.

Rozptyl

Další charakteristika popisuje, jak moc se dá čekat, že se hodnoty náhodné veličiny „hemží“ kolem nějaké hodnoty.

Definition

Nechť X je náhodná veličina s konečnou střední hodnotou. Pak definujeme **rozptyl** veličiny X výrazem

$$\operatorname{var} X = \operatorname{E}(X - \operatorname{E} X)^2,$$

pokud taková konečná hodnota existuje.
Odmocnina z rozptylu $\sqrt{\operatorname{var} X}$ se nazývá **směrodatná odchylka** náhodné veličiny X.

Jde o zjevnou obdobu definice kvadrátu vzdálenosti vektorů nebo funkcí. Zachycujeme tak „očekávanou vzdálenost“ hodnot X od její střední hodnoty.

Theorem

Jestliže má náhodná veličina X konečný rozptyl, pro libovolné skaláry $a, b \in \mathbb{R}$ platí

- $\operatorname{var} X = \operatorname{E} X^2 - (\operatorname{E} X)^2$
- $\operatorname{var}(a + bX) = b^2 \operatorname{var} X$
- $\sqrt{\operatorname{var}(a + bX)} = |b|\sqrt{\operatorname{var} X}$.

Theorem

Jestliže má náhodná veličina X konečný rozptyl, pro libovolné skaláry a, $b \in \mathbb{R}$ platí

- $\operatorname{var} X = \mathrm{E}\, X^2 - (\mathrm{E}\, X)^2$
- $\operatorname{var}(a + bX) = b^2 \operatorname{var} X$
- $\sqrt{\operatorname{var}(a + bX)} = |b| \sqrt{\operatorname{var} X}$.

Občas přiřazujeme k X **normovanou** veličinu Z,

$$Z = \frac{X - \mathrm{E}\, X}{\sqrt{\operatorname{var} X}},$$

která má zjevně nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl.

Normální rozdělení Z má hustotu $\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ distribuční funkci $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dt$.
Náhodná veličina $Y = \mu + \sigma Z$, $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ má distribuční funkci

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{\frac{y-\mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

$$\{\text{substituce } x = \mu + \sigma z\}$$

$$= \int_{-\infty}^{y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx$$

Takové rozdělení je *normální*, píšeme $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.
Parametry odpovídají střední hodnotě a rozptylu.

Uvažme $Z \sim N(0,1)$ a podívejme se na náhodnou veličinu $X = Z^2$.

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P[Z^2 < x] \\ &= \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} e^{-t/2} dt \end{aligned}$$

s hustotou

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{-1/2} e^{-t/2}.$$

Říkáme mu rozdělení χ^2, píšeme $X \sim \chi^2(1)$.