

PB165 Grafy a sítě:
Plánování projektu, plánování pomocí barvení grafu

1 Plánování projektu

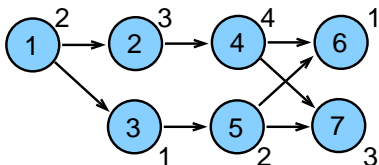
- Neomezené zdroje
- Variabilní doba trvání

2 Barvení grafu

- Popis problému a jednoduché řešení
- Přiřazení místností
- Rezervační problém
- Rozvrhování operátorů

Plánování projektu

- Základní problém **plánování projektu**
 - precedenční podmínky
 - paralelní stroj s **neomezeným počtem strojů**
 - minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)
 - relativně jednoduché na řešení: metoda kritické (nejdelší) cesty
princip: nalezneme kritickou cestu a ta určuje makespan



- Rozšíření: **variabilní doba trvání**
 - doba trvání úlohy spojena s cenou provádění
 - optimalizace: kompromis mezi cenou na ukončení projektu a cenou za zkrácení délky úloh

Popis problému

- Popis problému
 - paralelních stroj
 - n úloh s precedenčními omezeními
 - doba provádění p_j
 - objektivní funkce: minimalizace maximálního času konce úloh (*makespan*)

Základní problém s neomezenými zdroji

$P_\infty | prec | C_{max} \quad m \geq n$ metoda kritické cesty

Plánování projektu s omezenými zdroji

$P_m | prec | C_{max} \quad 2 \leq m < n$ NP úplný problém

- Značení
 - S'_j nejdřívější startovní čas úlohy j
 - $C'_j = S'_j + p_j$ nejdřívější koncový čas úlohy j
 - S''_j nejpozdější startovní čas úlohy j
 - C''_j nejpozdější koncový čas úlohy j
 - $Prec_j$ (přímí) předchůdci úlohy j
 - $\forall k \in Prec_j$ všechny úlohy k , které předcházejí úlohu j
 - $\forall j : k \in Prec_j$ všechny úlohy j , které následují úlohu k

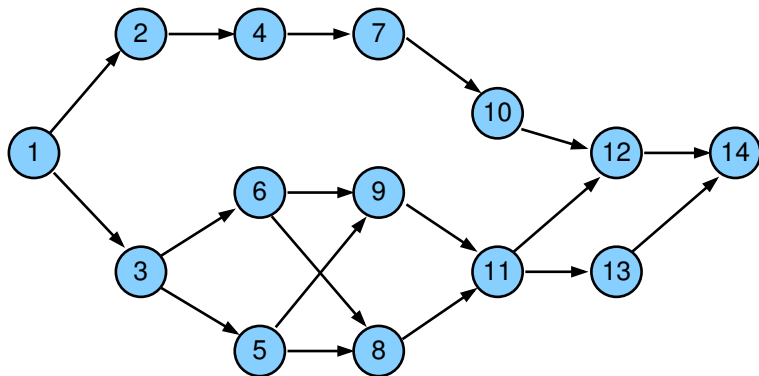
Metoda kritické cesty (*critical path method CPM*)

- Popis algoritmu pro nalezení **kritických cest**
 - **dopředná procedura**
 - start v čase 0
 - výpočet **nejdřívějšího startovního času** každé úlohy
 - čas dokončení poslední úlohy je *makespan*
 - **zpětná procedura**
 - start v čase rovném *makespan*
 - výpočet **nejpozdějšího startovního času**, aby byl realizován tento *makespan*
- **Úloha s rezervou (*slack job*)**
 - její startovní čas může být odložen aniž je navýšen *makespan*
 - úloha j , jejichž nejdřívější startovní čas S_j' je menší než nejpozdější startovní čas S_j''
 - **rezerva úlohy j :** $S_j'' - S_j'$
- **Kritická úloha**
 - úloha, která nesmí být odložena
 - úloha, jejíž nejdřívější startovní čas je roven nejpozdějšímu start. času
- **Kritická cesta**
 - řetěz úloh začínající v čase 0 a končící v čase C_{max}
 - v grafu může existovat více kritických cest
 - kritické cesty se mohou částečně překrývat
 - **graf kritických cest G_{CP} :** podgraf daný množinou kritických úloh a kritických cest

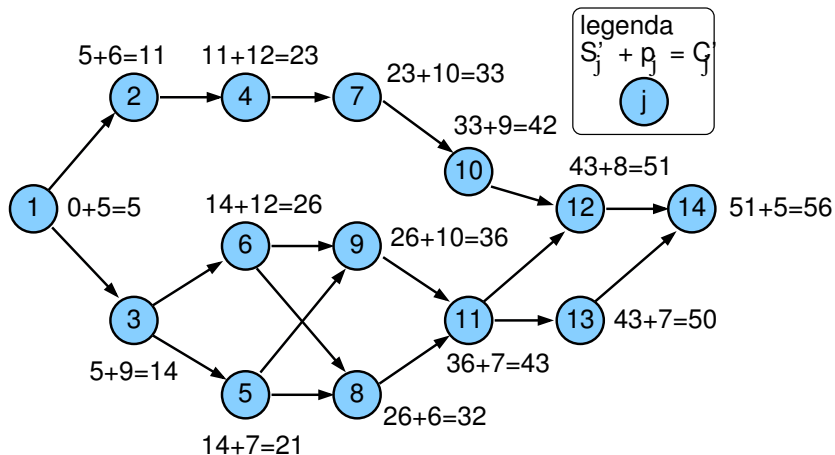
Cvičení: Jaký je rozdíl mezi kritickou cestou a grafem kritických cest? Ukažte rozdíl na příkladu.

Kritická cesta: zadání příkladu

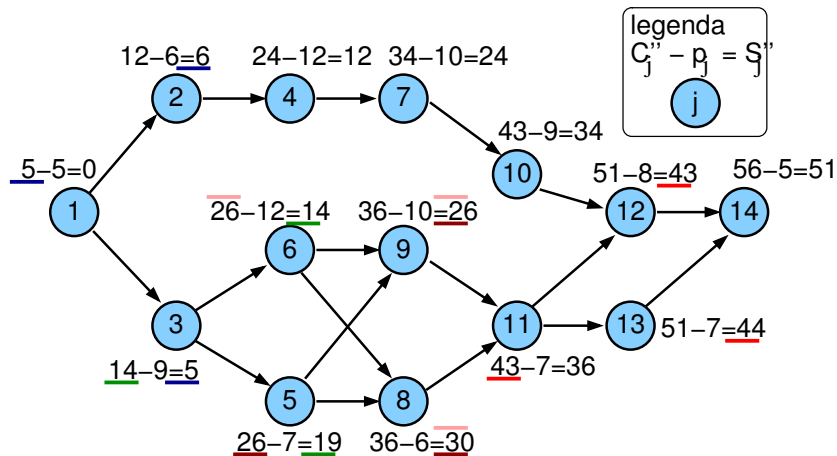
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p _j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5



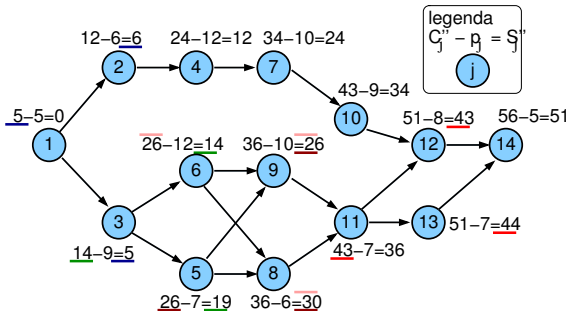
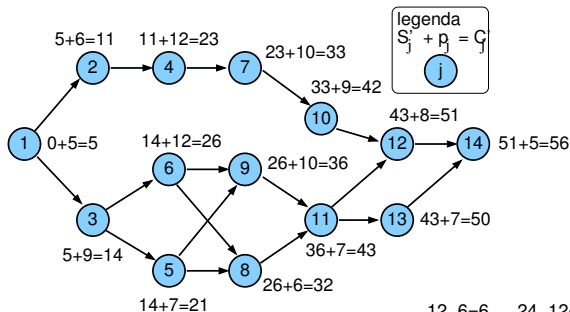
Příklad: dopředná procedura



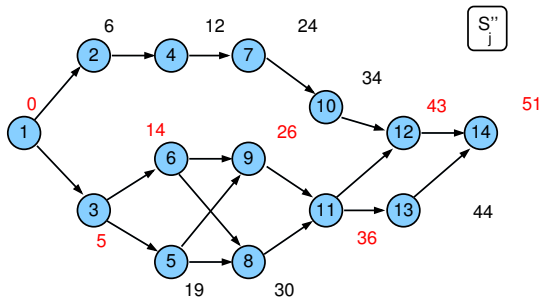
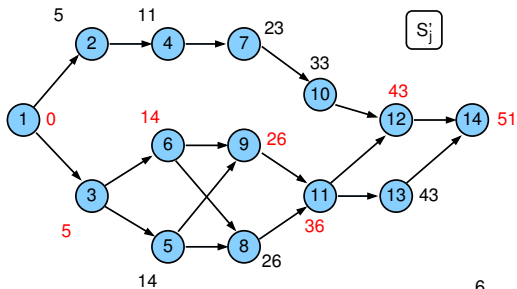
Příklad: zpětná procedura



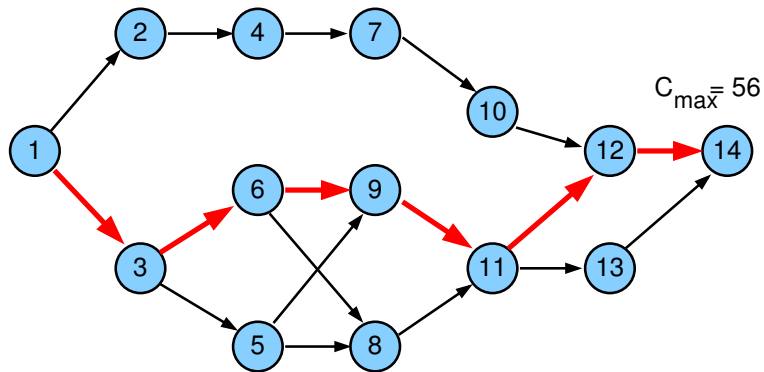
Výsledky dopředné a zpětné procedury



Porovnání S'_j a S''_j

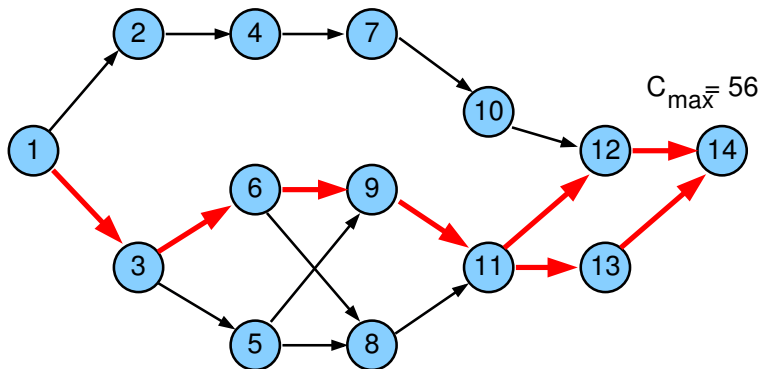


Kritická cesta



Graf kritických cest G_{CP}

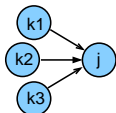
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	8	5



- G_{CP} : dvě kritické cesty $\{1,3,6,9,11,12,14\}$, $\{1,3,6,9,11,13,14\}$, které se částečně překrývají

1 Dopředná procedura

- 1 $t = 0$
- 2 pro všechny úlohy j bez předchůdce: $S'_j = 0, C'_j = p_j$
- 3 vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j :

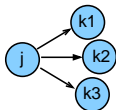


$$S'_j = \max_{\forall k \in \text{Prec}_j} C'_k, \quad C'_j = S'_j + p_j$$

- 4 optimální *makespan* je $C_{\max} = \max(C'_1, \dots, C'_n)$

2 Zpětná procedura

- $t = C_{\max}$
- pro všechny úlohy j bez následníka: $C''_j = C_{\max}, S''_j = C_{\max} - p_j$
- vypočítej postupně pro všechny zbývající úlohy j :



$$C''_j = \min_{\forall k: j \in \text{Prec}_k} S''_k, \quad S''_j = C''_j - p_j$$

- ověř, že $0 = \min(S''_1, \dots, S''_n)$

- ① Jaká je grafová reprezentace rozvrhovacího problému zadaného tabulkou:

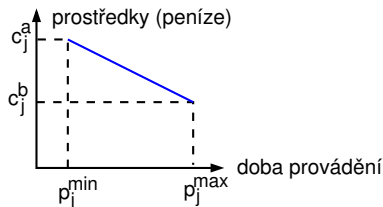
úloha	doba trvání	předchůdci
1	1	-
2	2	1
3	3	1
4	4	2,5,6
5	5	1,2
6	2	3
7	4	-
8	1	7,9
9	5	4
10	2	8

- ② Nalezněte graf kritických cest v tomto grafu.
- ③ Jaký má tento rozvrh makespan?
- ④ Existují v problému úlohy s rezervou? Pokud ano, uveďte o které úlohy se jedná. Jakou mají tyto úlohy rezervu?

Kompromis mezi časem a cenou

- Lze uvažovat **variabilní dobu trvání úloh**
 - za předpokladu vyšší ceny lze zkrátit dobu provádění
- **Lineární cena**
- Doba trvání $p_j^{min} \leq p_j \leq p_j^{max}$
- **Marginální cena**: cena za zkrácení doby trvání úlohy o 1 časovou jednotku

$$c_j = \frac{c_j^a - c_j^b}{p_j^{max} - p_j^{min}}$$



⇒ cena provádění úlohy j po dobu p_j : $c_j^b + c_j(p_j^{max} - p_j)$

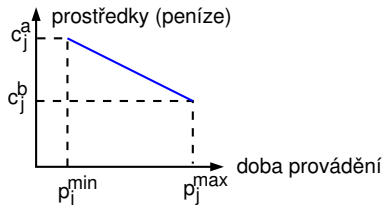
Cena za provádění projektu

- **Fixní režijní náklady c_0**
na časovou jednotku doby provádění projektu
- **Cena $F(p_j)$ za provádění projektu**
 - při době provádění úloh p_jurčena jako součet
 - ceny za provádění všech úloh
 - fixních režijních nákladů

celkem: $C_{\max} c_0$

$$F(p_j) = C_{\max} c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j))$$

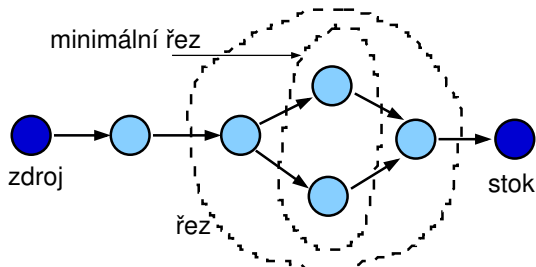
- Cíl: $\forall j$ nalézt p_j a S_j tak, aby byla $F(p_j)$ minimální



- Objektivní funkce: minimální cena projektu
- Kompromisní heuristika mezi časem a cenou
 - dobrá kvalita rozvrhu
 - použité i pro nelineární cenu
- Další přístupy: formulace lineárního programování
 - systém lineárních nerovnic s lineárním optimalizačním kritériem
 - simplexová metoda
 - optimální rozvrh
 - nelineární verze obtížně řešitelné

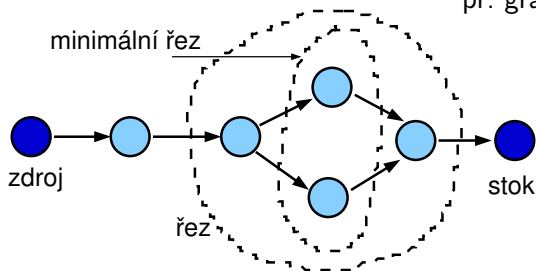
Řez, minimální řez

- Orientovaný graf $G = (V, E)$
- Počáteční uzel: zdroj $s \in V$
- Koncový uzel: stok $t \in V$
- **Řez ze zdroje s do stoku t :** ... také mluvíme o vrcholovém řezu
množina uzlů V' , jejíž smazáním z grafu se rozpojí zdroj a stok
 - E' množina hran incidentních s V'tj. v $G'=(V-V',E-E')$ neexistuje orientovaná cesta z s to t
- **Minimální řez z s do t :** řez U takový, že neexistuje řez $W \subset U$
 - tj. vrácení libovolného uzlu z U do grafu znovu spojí zdroj a stok



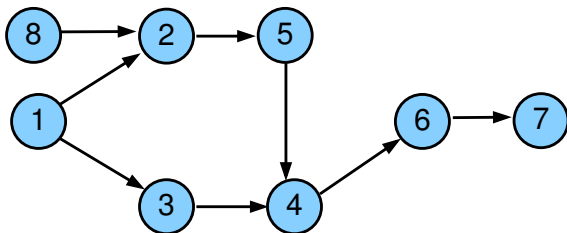
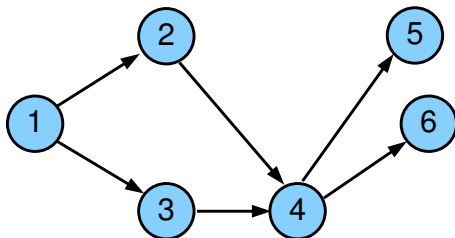
Řez, minimální řez II.

- Uvažujme orientovaný graf $G_0 = (V_0, E_0)$
 - Do grafu přidáme zdroj:
 - nový vrchol s a
 - hrany S vedoucí z s do všech vrcholů G_0 bez předchůdců
 - Do grafu přidáme stok:
 - nový vrchol t a
 - hrany T vedoucí ze všech vrcholů G_0 bez následníků do t
 - Nový graf $G = (V, E)$: $V = V_0 \cup \{s, t\}$, $E = E_0 \cup S \cup T$
 - Budeme hledat řezy a minimální řezy z s do t v G
- př. graf má 4 minimální řezy



Cvičení: minimální řez

Kolik minimálních řezů a které mají následující grafy?

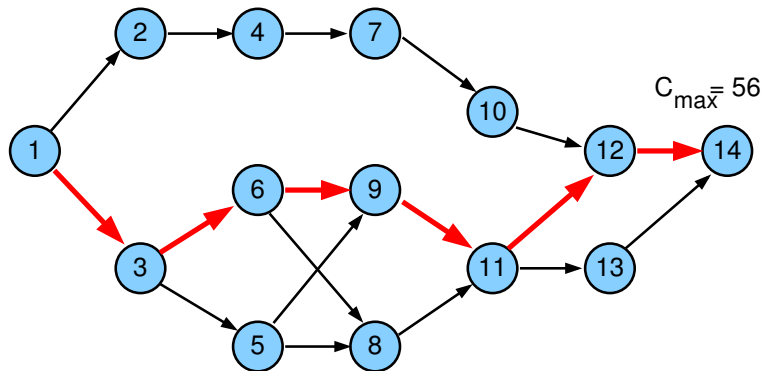


Kompromisní heuristika: příklad

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j^{\max}	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
p_j^{\min}	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
c_j^b	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
c_j	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

fixní režijní náklady na časovou jednotku $c_0=6$

Příklad (pokračování): maximální doba provádění



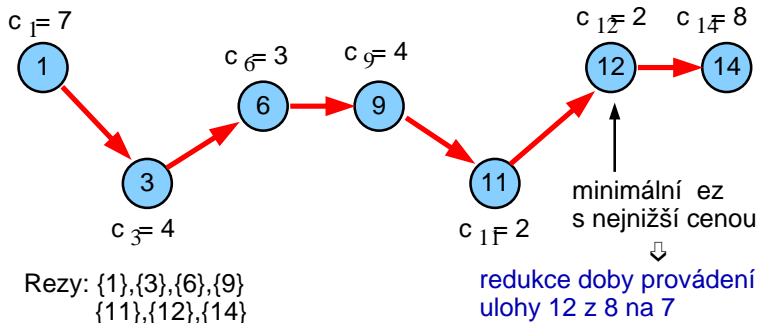
Kompromisní heuristika: příklad

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j^{\max}	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5
$c_0=6$ p_j^{\min}	3	5	7	9	5	9	8	3	7	5	4	5	5	2
c_j^b	20	25	20	15	30	40	35	25	30	20	25	35	20	10
c_j	7	2	4	3	4	3	4	4	4	5	2	2	4	8

Náklady na provedení projektu při maximální době trvání úloh

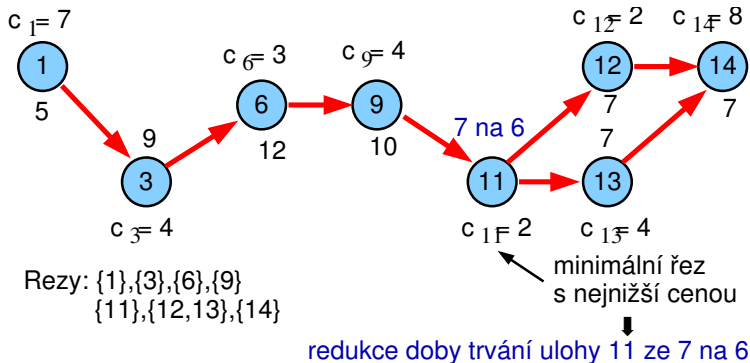
$$\begin{aligned}F(p_j^{\max}) &= C_{\max}c_0 + \sum_j (c_j^b + c_j(p_j^{\max} - p_j^{\min})) = \\&= C_{\max}c_0 + \sum_j c_j^b = \\&= 56 \times 6 + 20 + 25 + 20 + 15 + 30 + 40 + 35 + 25 + \\&\quad + 30 + 20 + 25 + 35 + 20 + 10 = \\&= 336 + 350 = 686\end{aligned}$$

- Kandidáti na redukci: uzel 11 a uzel 12, vybereme uzel 12



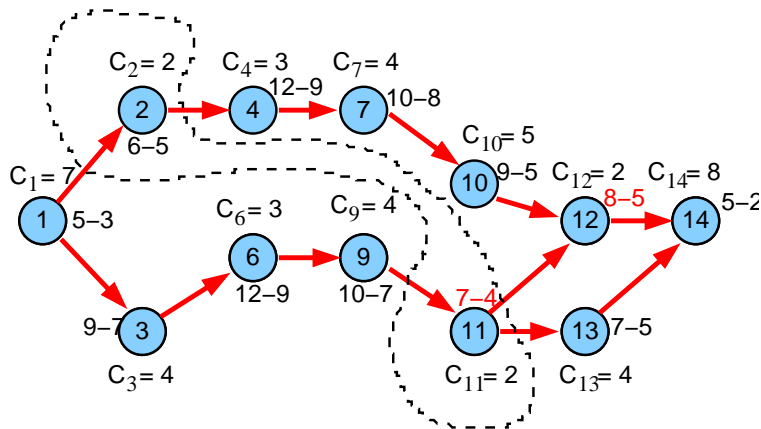
- Fixní režijní náklady se redukuje z 56×6 na $55 \times 6 = 330$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{12} = 2$, tj. $350 + 2 = 352$
- Celková cena klesla z 686 na $330 + 352 = 682$

Graf kritických cest G_{CP}



- Fixní režijní náklady se redukuje z 55×6 na $54 \times 6 = 324$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_{11} = 2$, tj. $352 + 2 = 354$
- Celková cena klesla z 682 na $324 + 354 = 678$

Graf kritických cest G_{CP}



další redukce: pro uzel 2 na 5 a pro uzel 11 na 5, ...

- Fixní režijní náklady se redukuje z 54×6 na $53 \times 6 = 318$
- Cena za provádění úloh naroste o $c_2 + c_{11} = 2 + 2$, tj. $354 + 4 = 358$
- Celková cena klesla z 678 na $318 + 358 = 676$

Algoritmus kompromisní heuristiky

- 1
 - Nastav doby provádění na jejich maximum: $p_j = p_j^{max}$
 - Urči všechny kritické cesty s těmito dobami provádění
 - Zkonstruuuj graf G_{CP} kritických cest
- 2
 - Urči všechny minimální řezy v G_{CP}
 - Najdi řezy, jejichž doba provádění je větší než jejich minimum:
 $p_j > p_j^{min} \quad \forall j \in G_{CP}$
 - Pokud takový řez neexistuje STOP, jinak běž na krok 3
- 3
 - Pro každý minimální řez: spočítej cenu redukující všechny doby provádění o 1 časovou jednotku
 - Vyber minimální řez s nejnižší cenou
 - Jestliže je menší než fixní režijní náklady c_0 za časovou jednotku běž na krok 4, jinak STOP
- 4
 - Redukuj všechny doby provádění v minimálním řezu o 1 časovou jednotku
 - Urči novou množinu kritických cest
 - Reviduj graf G_{CP} a běž na krok 2

Kompromisní heuristika: cvičení

- Jaká je cena za provádění projektu, pokud jsou doby trvání úloh maximální, tj. čemu se rovná $F(p_j^{max})$ za následujících předpokladů?
 - fixní režijní náklady na časovou jednotku jsou $c_0 = 4$
 - p_j^{max} maximální doba trvání úlohy j
 - p_j^{min} minimální doba trvání úlohy j
 - c_j marginální cena
 - c_j^b cena za provádění úlohy j při maximální době jejího trvání
 - $Prec_j$ předchůdci úlohy j

j	1	2	3	4	5	6	7	8
p_j^{max}	4	4	4	4	4	4	3	6
p_j^{min}	3	2	2	2	2	2	2	6
c_j^b	20	25	20	15	30	40	35	25
c_j	3	5	5	1	2	5	3	5

j	1	2	3	4	5	6	7	8
$Prec_j$	-	1	4,5	2	2	3,7	5	6

- Jak lze cenu za projekt zlepšit, pokud provedeme dva kroky kompromisní heuristiky? Kterým úlohám upravíte dobu trvání v jednotlivých krocích?

- 1 Plánování projektu
 - Neomezené zdroje
 - Variabilní doba trvání
- 2 Barvení grafu
 - Popis problému a jednoduché řešení
 - Přiřazení místností
 - Rezervační problém
 - Rozvrhování operátorů

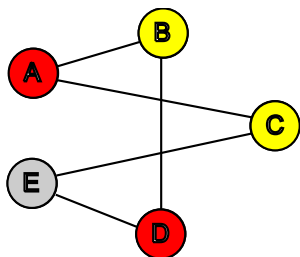
Problém barvení grafu

- Je možné obarvit vrcholy grafu s použitím n barev tak, aby žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou?

Chromatické číslo grafu

- Minimální počet barev n nutný k obarvení grafu tak, by žádné dva sousední vrcholy nebyly obarveny stejnou barvou.

NP-úplný problém



Barvení grafu a rozvrhování

- Rezervační problémy
- Přiřazení místností
- Rozvrhování operátorů

Heuristiky pro barvení grafu se saturací

- **Stupeň uzlu**
 - počet hran spojených s uzlem
- **Úroveň saturace**
 - počet různých barev spojených s uzlem
- Intuice
 - obarvi uzly s vyšším stupněm dříve
 - obarvi uzly s vyšší úrovní saturace dříve
- **Algoritmus**
 - 1 uspořádej uzly v klesajícím pořadí podle jejich stupně
 - 2 použij barvu 1 pro první uzel
 - 3 vyber neobarvený uzel s maximální úrovní saturace v případě volby z nich vyber uzel s maximálním stupněm v **neobarveném podgrafu**
 - 4 obarvi vybraný uzel s nejmenší možnou barvou
 - 5 jestliže jsou všechny uzly obarveny STOP jinak běž na krok 3

- **Problém přiřazení místností**

cíl: přiřazení místnosti každému předmětu se zadanými časy

- úloha = předmět s několika schůzkami týdně, jejichž časy jsou určeny
- zdroj = místnost
- dva předměty nesmí být zároveň vyučovány ve stejné místnosti
- všechny schůzky předmětu musí být vyučovány ve stejné místnosti

možné řešení:

- nalezení rozvrhu vzhledem k danému počtu místností
- nalezení rozvrhu s minimálním počtem místností

- **Přiřazení místností jako barvení grafu**

- vrchol: předmět
- hrana: mezi předměty, které vyžadují stejný čas výuky
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti (zdroji)
 - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

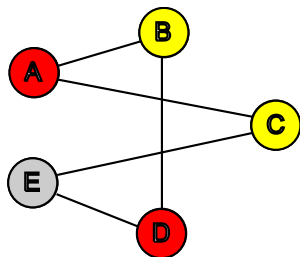
Přiřazení místností: příklad

Kolik místností je třeba k rozvrhování těchto předmětů?

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,4)	(1,3)	(2,4)	(3,5)	(2,5)
stupeň	2	2	2	2	2

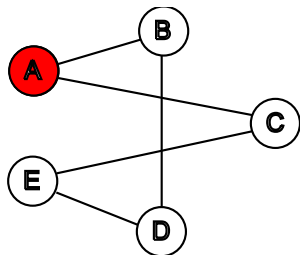
Řešení:

místnost červená žlutá žlutá červená šedá

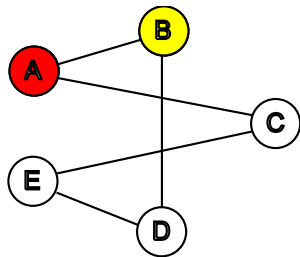


čas/předmět	A	B	C	D	E
1	+	+	-	-	-
2	-	-	+	-	+
3	-	+	-	+	-
4	+	-	+	-	-
5	-	-	-	+	+

Přřazení místností: příklad (pokračování)

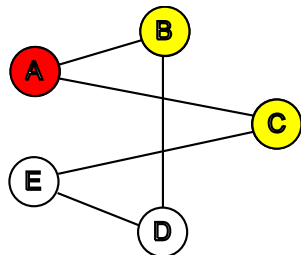


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	1	1	0	0
stupeň neob.	-	1	1	2	2

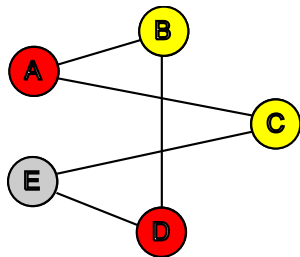
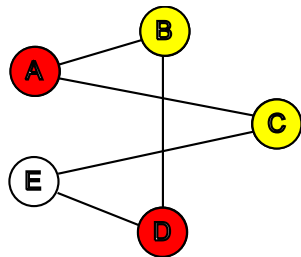


předmět	A	B	C	D	E
saturace	-	-	1	1	0
stupeň neob.	-	-	1	1	2

Přřazení místností: příklad (dokončení)



předmět	A	B	C	D	E
saturovac	-	-	-	1	1
stupeň neob.	-	-	-	1	1



- Příklady
 - rezervace aut
 - rezervace pokojů v hotelu
 - rezervace strojů v továrně
- Určen časový interval pro každou rezervaci
 - $p_j = d_j - r_j$
 - p_j doba trvání úlohy
 - r_j termín dostupnosti
 - d_j termín dokončení
- Každá rezervace vyžaduje zdroj (auto, pokoj, stroj)
- Možné řešení
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů?
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací?

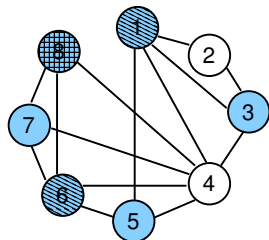
Rezervační problém jako barvení grafu

- Vrchol: rezervace
- Hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase
- Barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji
 - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase
 - kolik zdrojů je třeba ke splnění rezervací = chromatické číslo
 - lze rezervace realizovat s daným počtem zdrojů = existuje barvení s daným počtem barev

• Příklad:

j	1	2	3	4	5	6	7	8
r_j	0	1	1	3	4	5	6	6
d_j	5	3	4	7	6	7	9	8

Odpovídající problém barvení grafu:



Rozvrhování operátorů

- Zadáno několik různých operátorů
- Úloha potřebuje jeden nebo více specifických operátorů
- Úlohy vyžadující stejného operátora nemohou běžet zároveň
- Jednotková doba trvání úlohy
- Možné řešení:
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu
 - nalezení minimálního času (=makespan) tak, aby byly provedeny všechny úlohy
- Rozvrhování operátorů jako barvení grafu
 - vrchol: úloha
 - hrana: mezi úlohami, které potřebují stejného operátora
 - barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy
 - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora
 - rozvržení všech úloh v rámci časového horizontu = existuje barvení s daným počtem barev
 - makespan = chromatické číslo grafu

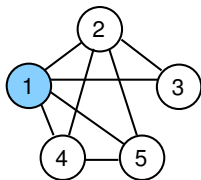
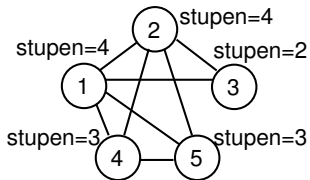
Vytvoř rozvrh pro 5 schůzek se 4 lidmi

- schůzka = úloha, člověk = operátor
- všechny schůzky trvají jednu hodinu

	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1

D.Ú. plánování schůzek (řešení)

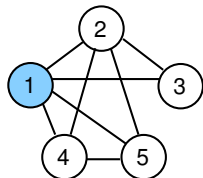
	1	2	3	4	5
Joe	1	1	0	1	1
Lisa	1	1	1	0	0
Jane	1	0	1	0	0
Larry	0	1	0	1	1



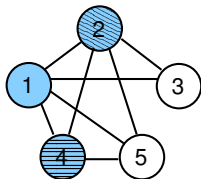
Můžeme vybrat buď
úlohu 1 nebo úlohu 2

Např. vybereme 1 a obarvíme
barvou 1

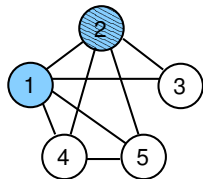
D.Ú. plánování schůzek (dokončení)



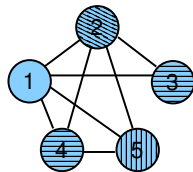
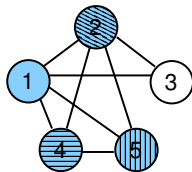
Úroveň saturace = 1 pro všechny úlohy
Vyber 2 vzhledem k nejvyššímu stupni



Úroveň saturace = 2 pro uzel 3
Úroveň saturace = 3 pro uzel 5
Vyber 5 na obarvení



Úroveň saturace = 2 pro všechny uzly
Vyber 4 vzhledem k nejvyššímu stupni



V posledním kroku obarvi 3
stejnou barvou jako 4
⇒ celkem 4 barvy, tj. *makespan*=4

Přiřazení místností

- vrchol: předmět úloha
- hrana: mezi předměty vyžadujícími stejný čas průnik časových bodů
- barva vrcholu: odpovídá vybrané místnosti zdroj
 - sousedící vrcholy/předměty musí mít různé barvy/místnosti, protože vyžadují stejný čas

Rezervační problém

- vrchol: rezervace úloha
- hrana: pokud se dvě rezervace překrývají v čase průnik intervalů
- barva vrcholu: odpovídá vybranému zdroji zdroj
 - sousedící vrcholy/rezervace musí mít různé barvy/zdroje, protože se překrývají v čase

Rozvrhování operátorů

- vrchol: úloha úloha
- hrana: mezi úlohami vyžadujícími stejného operátora průnik zdrojů
- barva vrcholu: čas pro realizaci úlohy časový bod
 - sousedící úlohy/vrcholy musí mít různý čas/barvu, protože vyžadují stejného operátora

Jakou grafovou reprezentaci mají následující problémy? Problémy vyřešte a ukažte postup řešení.

- 1 Určete, ve kterých místnostech se mají konat schůzky tak, aby byla v každé místnosti nejvýše jedna schůzka a přitom byly schůzky organizovány v uvedených termínech.

předmět	A	B	C	D	E
časy	(1,3,5)	(2,4)	(1,2)	(3,4)	(1,5)

Nápověda: problém přiřazení místností

- 2 Stroje v továrně mají být využívány uvedenými operacemi v následujících časových intervalech. Určete, kolik strojů je třeba a které stroje budou využívat jednotlivé operace v případě, že stroj může zpracovávat nejvýše jednu operaci.

operace	A	B	C	D	E	F
interval	1-3	2-4	1-4	4-5	5-8	5-6

Nápověda: rezervační problém

- 3 Určete, kolik času je potřeba pro realizaci operací na uvedených strojích, jestliže může být na každém stroji zpracovávána nejvýše jedna operace.

operace	1	2	3	4	5	6	7
stroje	A,B	C,D	A,C,E	E,F	E,G	D,G	G

Nápověda: rozvrhování operátorů