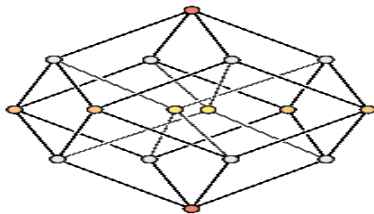


6 Ekvivalence, Uspořádané množiny

V této lekci dále pokračujeme probíráním binárních relací na množinách jako nástrojů vyjadřujících vztahy mezi objekty. Zaměřujeme se nyní především na relace „srovnávající“ objekty podle jejich vlastností – buď na shodnosti nebo uspořádání.



Stručný přehled lekce

- * Relace ekvivalence, jím odpovídající rozklady množin.
- * Uspořádané množiny a relevantní pojmy k uspořádání.
- * Hasseovské diagramy uspořádaných množin.

Vlastnosti binárních relací, zopakování

Nechť $R \subseteq M \times M$. Binární relace R je

- *reflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \in R$;



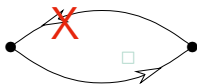
- *ireflexivní*, právě když pro každé $a \in M$ platí $(a, a) \notin R$;



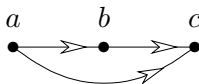
- *symetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b) \in R$, pak také $(b, a) \in R$;



- *antisymetrická*, právě když pro každé $a, b \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, a) \in R$, pak $a = b$;

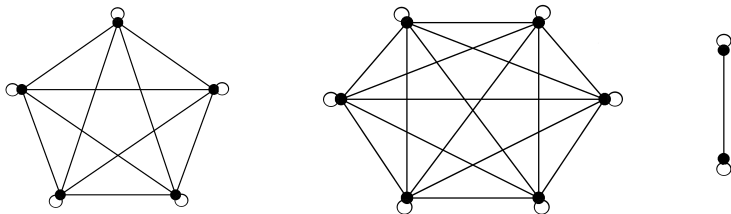


- *tranzitivní*, právě když pro každé $a, b, c \in M$ platí, že jestliže $(a, b), (b, c) \in R$, pak také $(a, c) \in R$.



6.1 Relace ekvivalence a rozklady

- Podle Definice 5.2 je relace $R \subseteq M \times M$ *ekvivalence* právě když R je reflexivní, symetrická a tranzitivní. Tyto **tři vlastnosti** tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je ekvivalencí. □
- Jak vypadá **graf relace ekvivalence**? □



- Neformálně řečeno; ekvivalence je relace $R \subseteq M \times M$, taková, že $(x, y) \in R$ právě když x a y jsou v nějakém smyslu „stejně“ (leží na stejné hromádce).

Značení. V případě relace ekvivalence se poměrně často lze setkat s označením jako \sim či \approx místo R . Místo $(x, y) \in R$ se pak píše $x \approx y$.

Další ukázkové binární relace

Příklad 6.1. Necht' M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ a zkoumejme, zda se jedná o ekvivalence:

- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou výšku jako y ; \square
- $(x, y) \in R$ právě když x má stejnou barvu vlasů jako y ; \square
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku a stejnou barvu vlasů; \square
- $(x, y) \in R$ právě když x, y mají stejnou výšku **nebo** stejnou barvu vlasů. \square

U kterého body se nejedná o relaci ekvivalence a proč? \square

Je to poslední případ, kdy není splněna tranzitivita! \square

Tvrzení 6.2. Necht' R, S jsou dvě relace ekvivalence na stejné množině M . Pak jejich **průnik** $R \cap S$ je opět relací ekvivalence.

Příklad 6.3. Necht' $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je binární relace definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když $|x - y|$ je dělitelné třemi. V jakém smyslu jsou zde x a y „stejné“? \square

Platí $(x, y) \in R$ právě když x, y dávají stejný zbytek po dělení třemi. Je to opět relace ekvivalence. \square

Příklad 6.4. Bud' R binární relace mezi všemi studenty na přednášce FI: IB000 definovaná takto: $(x, y) \in R$ právě když x i y sedí v první lavici. \square

Už na první pohled jde o relaci symetrickou a tranzitivní. Proč se v tomto případě **nejedná** o relaci ekvivalence? \square

Protože není reflexivní pro studenty sedící v dalších lavicích. (Takže si dávejte dobrý pozor na správné pochopení definic.) \square

Rozklady a jejich vztah k ekvivalencím

Definice 6.5. Rozklad množiny. Necht' M je množina.

Rozklad (na) M je množina podmnožin $\mathcal{N} \subseteq 2^M$ splňující násl. tři podmínky:

- $\emptyset \notin \mathcal{N}$ (tj. každý prvek \mathcal{N} je **neprázdná** podmnožina M);
- pokud $A, B \in \mathcal{N}$, pak buď $A = B$ nebo $A \cap B = \emptyset$;
- $\bigcup_{A \in \mathcal{N}} A = M$. \square

Prvkům \mathcal{N} se také říká *třídy rozkladu*.

- Bud' $M = \{a, b, c, d\}$. Pak $\mathcal{N} = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d\}\}$ je rozklad na M . \square
- Necht' $A_0 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 0\}$, $A_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 1\}$,
 $A_2 = \{k \in \mathbb{N} \mid k \bmod 3 = 2\}$.
Pak $\mathcal{N} = \{A_0, A_1, A_2\}$ je rozklad všech přirozených čísel \mathbb{N} podle zbytkových tříd. \square

Každý rozklad \mathcal{N} na M jednoznačně určuje jistou ekvivalenci $R_{\mathcal{N}}$ na M :

Věta 6.6. Necht' M je množina a \mathcal{N} rozklad na M . Necht' $R_{\mathcal{N}} \subseteq M \times M$ je relace na M definovaná takto

$$(x, y) \in R_{\mathcal{N}} \text{ právě když existuje } A \in \mathcal{N} \text{ taková, že } x, y \in A.$$

Pak $R_{\mathcal{N}}$ je *ekvivalence* na M . \square

Důkaz: Dokážeme, že $R_{\mathcal{N}}$ je *reflexivní, symetrická a tranzitivní* (Def. 5.2). \square

- Reflexivita: Buď $x \in M$ libovolné. Jelikož \mathcal{N} je rozklad na M , musí existovat $A \in \mathcal{N}$ takové, že $x \in A$ (jinak spor se třetí podmínkou z Definice 6.5). Proto $(x, x) \in R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je reflexivní. \square
- Symetrie: Necht' $(x, y) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ pak existuje $A \in \mathcal{N}$ taková, že $x, y \in A$. To ale znamená, že také $(y, x) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$, tedy $R_{\mathcal{N}}$ je symetrická. \square
- Tranzitivita: Necht' $(x, y), (y, z) \in R_{\mathcal{N}}$. Podle definice $R_{\mathcal{N}}$ existují $A, B \in \mathcal{N}$ takové, že $x, y \in A$ a $y, z \in B$. Jelikož $A \cap B \neq \emptyset$, podle druhé podmínky z Definice 6.5 platí $A = B$. Tedy $x, z \in A = B$, proto $(x, z) \in R_{\mathcal{N}}$ podle definice $R_{\mathcal{N}}$. \square

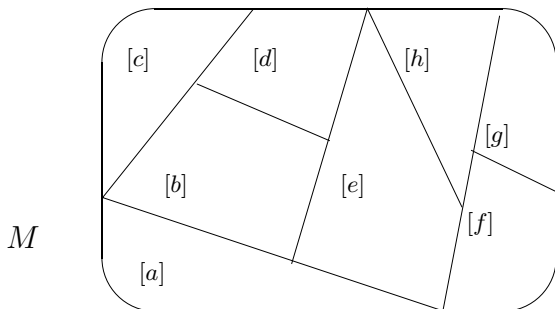
\square

Každá ekvivalence R na M naopak jednoznačně určuje jistý rozklad M/R na M :

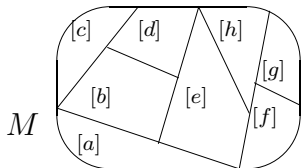
Věta 6.7. *Nechť M je množina a R ekvivalence na M . Pro každé $x \in M$ definujeme množinu*

$$[x] = \{y \in M \mid (x, y) \in R\}.$$

Pak $\{[x] \mid x \in M\}$ je rozklad na M , který značíme M/R . \square



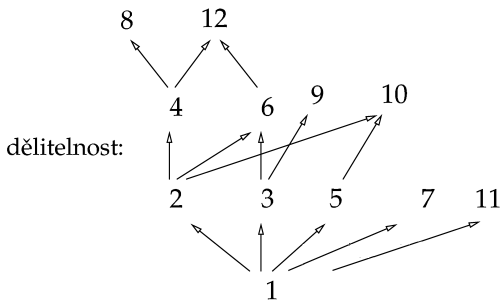
Důkaz: Dokážeme, že M/R splňuje podmínky Definice 6.5.



- Pro každé $[x] \in M/R$ platí $[x] \neq \emptyset$, neboť $x \in [x]$. \square
- Necht' $[x], [y] \in M/R$. Ukážeme, že pokud $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, pak $[x] = [y]$. \square
 Jestliže $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, existuje $z \in M$ takové, že $z \in [x]$ a $z \in [y]$. Podle definice $[x]$ a $[y]$ to znamená, že $(x, z), (y, z) \in R$. Jelikož R je symetrická a $(y, z) \in R$, platí $(z, y) \in R$. Jelikož $(x, z), (z, y) \in R$ a R je tranzitivní, platí $(x, y) \in R$. Proto také $(y, x) \in R$ (opět ze symetrie R). \square Nyní dokážeme, že $[y] = [x]$:
 - * „ $[x] \subseteq [y]$ “: Necht' $v \in [x]$. Pak $(x, v) \in R$ podle definice $[x]$. Dále $(y, x) \in R$ (viz výše), tedy $(y, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[y]$ znamená, že $v \in [y]$. \square
 - * „ $[y] \subseteq [x]$ “: Necht' $v \in [y]$. Pak $(y, v) \in R$ podle definice $[y]$. Dále $(x, y) \in R$ (viz výše), tedy $(x, v) \in R$ neboť R je tranzitivní. To podle definice $[x]$ znamená, že $v \in [x]$. \square
- Platí $\bigcup_{[x] \in M/R} [x] = M$, neboť $x \in [x]$ pro každé $x \in M$. \square

6.2 Uspořádané množiny

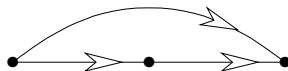
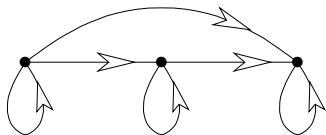
- Podle Definice 5.2 je relace $R \subseteq M \times M$ (částečné) *uspořádání* právě když R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní. Tyto **tři vlastnosti** tedy musí být splněny a ověřeny k důkazu toho, že daná relace R je uspořádáním. \square
- Neformálně řečeno: uspořádání je taková relace $R \subseteq M \times M$, kde $(x, y) \in R$ právě když x je v nějakém smyslu „**menší nebo rovno**“ než y . \square
Mohou ovšem existovat taková $x, y \in M$, kde neplatí $(x, y) \in R$ ani $(y, x) \in R$. (Pak říkáme, že x a y jsou *nesrovnatelné*.) \square
- Jak **názorně** zobrazit (částečné) uspořádání? Zjednodušeně takto:



Značení. Pro větší přehlednost se relace uspořádání často značí symboly jako \sqsubseteq či \preceq místo prostého R . I my budeme psát třeba $x \preceq y$ místo $(x, y) \in R$.

Poznámka: Zajisté jste se již setkali s „neostrým“ uspořádáním čísel \leq a „ostrým“ uspořádáním $<$. □ Všimněte si dobře, že námi definované uspořádání je **vždy neostré**.

Pokud byste naopak chtěli definovat **ostré** uspořádání, mělo by vlastnosti **ireflexivní**, antisymetrické a tranzitivní. (Příliš se však tato varianta nepoužívá.)

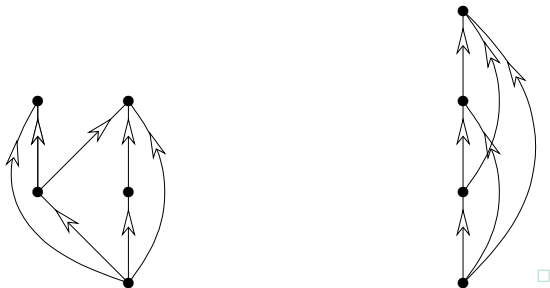


□

Nadále budeme pracovat pouze s neostrým uspořádáním, ale smyčky vyplývající z reflexivity a případně i šipky z tranzitivity budeme pro větší přehlednost v obrázcích vynechávat.

Uspořádaná množina

Definice 6.8. **Uspořádaná množina** je dvojice (M, \preceq) , kde M je množina a \preceq je (částečné) uspořádání na M . \square



Definice: Uspořádání \preceq na M je *lineární* (nebo také *úplné*), pokud každé dva prvky M jsou v \preceq srovnatelné.

Příklady uspořádaných množin

Příklad 6.9. *Nechť M je množina všech studentů 1. ročníku FI. Uvažme postupně relace $R \subseteq M \times M$ definované následovně (jedná se úplně vždy o uspořádání?):*

- $(x, y) \in R$ právě když x má alespoň takovou výšku jako y ; \square
- $(x, y) \in R$ právě když y má alespoň takovou výšku jako x . \square

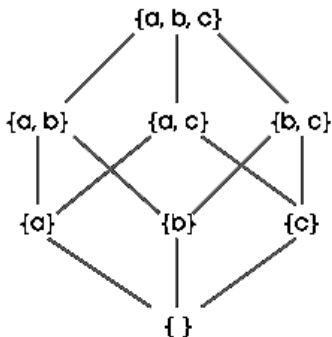
Všimněte si dobře možného problému – pokud by dva studenti měli přesně stejnou výšku, nebyla by splněna podmínka antisymetrie. Prakticky však můžeme uvažovat, že toto nenastane (matematically bychom řekli, že pravděpodobnost výskytu dvou studentů přesně stejné výšky bez omezení přesnosti měření je nula) a bude se jednat o uspořádání. \square

Příklad 6.10. *Nechť M je množina všech českých studentů 1. ročníku FI. Uvažme relaci $R \subseteq M \times M$ definovanou tak, že $(x, y) \in R$ právě když x a y mají stejné rodné číslo. \square Je možné, aby R byla uspořádáním na M ? \square*

Ano, za zákonného předpokladu jedinečnosti rodného čísla. Zajímavé, že? \square

Příklad 6.11. Další ukázky *uspořádaných množin* následují zde:

- (\mathbb{N}, \leq) je lineárně uspořádaná množina, kde \leq má „obvyklý“ význam. \square
- $(\mathbb{N}, |)$, kde $a|b$ je relace dělitelnosti „ a dělí b “ na přirozených číslech, je uspořádaná množina. Toto uspořádání není lineární. \square
- Buď M množina. Pak $(2^M, \subseteq)$ je uspořádaná množina (říkáme *inkluzí*). Které dvojice jsou v uspořádání inkluzí *nesrovnatelné*?



\square

Multikriteriální uspořádání

Co třeba znamená požadavek na „nejlepší počítač“? □

- I pokud se soustředíme jen na užité / výkonové charakteristiky počítače, můžeme porovnávat nejen podle rychlosti procesoru, ale také třeba podle výkonu grafiky, velikosti paměti a disku, nebo i počtu nakouslých jablek. □
- Takže jak lze objekty podle více kritérií seřadit? □
- Pro **numerická kritéria** lze řadit podle jejich váženého průměru (či součtu). □
- Nebo uspořádat podle průniku seřazení jednotlivých kritérií (**po složkách**).
Pokud P je lepší než Q, tak P v žádném kritériu nemůže zaostávat za Q. □
Avšak výsledkem bude typicky existence několika „nejlepších“ objektů, které nebudeme umět vzájemně porovnat. □
- Nakonec **slovníkovým uspořádáním**: Kritéria seřadíme od nejdůležitějšího a první odlišná hodnota kritéria rozhoduje.
Například nás v první řadě zajímá rychlost procesoru, poté velikost paměti a až nakonec výkon grafiky či velikost disku... (nejsme hráči her)

Formalizace multikriteriálního uspořádání

Formálně mějme několik kritérií označených indexovou množinou I . Pro $i \in I$ nechť hodnoty nabývané i -tým kritériem tvoří uspořádanou množinu (A_i, \leq_i) .

Definice 6.12. Uspořádání podle více kritérií.

Pro $I \subseteq \mathbb{N}$ mějme systém uspořádaných množin (A_i, \leq_i) kde $i \in I$. Na množině $M := \prod_{i \in I} A_i$ definujeme binární relace \sqsubseteq a \preceq takto;

pro $\ell, m \in M$ kde $\ell = (\ell_i : i \in I)$ a $m = (m_i : i \in I)$ platí

* (po složkách)

$\ell \sqsubseteq m$ právě když $\ell_i \leq_i m_i$ pro všechna $i \in I$,

* (lexikograficky)

$\ell \preceq m$ právě když $\ell = m$, nebo

existuje $j \in I$ tak, že $\ell_j \prec_j m_j$ a

pro všechna $i \in I, i < j$ platí $\ell_i = m_i$.

Tvrzení 6.13. Relace \sqsubseteq a \preceq jsou uspořádání. Navíc, pokud všechny (A_i, \leq_i) jsou lineárně uspořádané, tak lexikografické (M, \preceq) je taktéž lineární.

6.3 Pojmy uspořádaných množin

Definice 6.14. Necht' (M, \preceq) je uspořádaná množina.

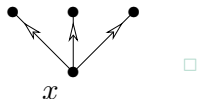
Prvek $x \in M$ je

- minimální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že z $y \preceq x$ vyplývá $x \preceq y$, čili podle antisymetrie pro každé $y \preceq x$ platí $y = x$.



- maximální* právě když pro každé $y \in M$ platí, že z $x \preceq y$ vyplývá $y \preceq x$, čili podle antisymetrie pro každé $y \succeq x$ platí $y = x$.
(Tj. x je maximální, právě když neexistuje žádný prvek ostře větší než x , a x je minimální, právě když neexistuje žádný prvek ostře menší než x .) □

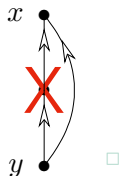
- nejmenší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $x \preceq y$.



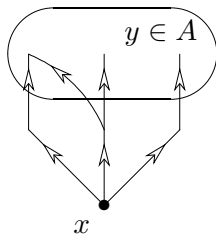
- největší* právě když pro každé $y \in M$ platí, že $y \preceq x$.

Prvek $x \in M$

- *pokrývá* $y \in M$ právě když $x \neq y$, $y \preceq x$ a neexistuje žádné $z \in M$ takové, že $x \neq z \neq y$ a $y \preceq z \preceq x$.

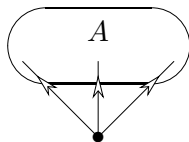


- je *dolní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $x \preceq y$ pro každé $y \in A$.

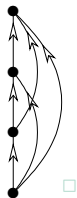


- je *horní závora* (mez) množiny $A \subseteq M$ právě když $y \preceq x$ pro každé $y \in A$.

- $x \in M$ je *infimum* množiny $A \subseteq M$ právě když x je největší dolní závora (mez) množiny A .

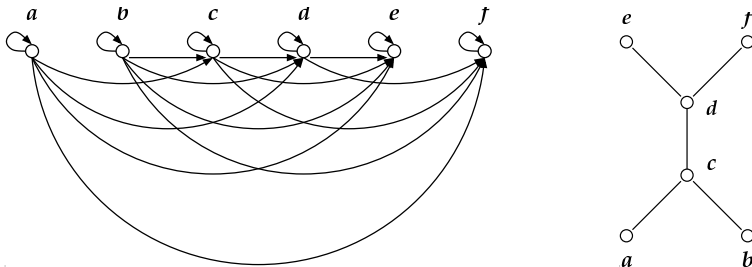


- $x \in M$ je *supremum* množiny $A \subseteq M$, právě když x je nejmenší horní závora (mez) množiny A . □
- $A \subseteq M$ je *řetězec* v uspořádání \preceq právě když (A, \preceq) je *lineárně* uspořádaná množina.

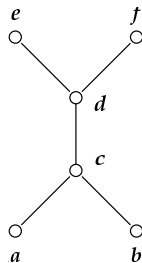
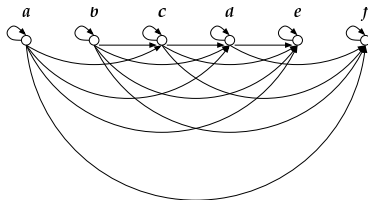


Haseovské diagramy

Motivací zavedení tzv. Haseovských diagramů uspořádaných množin jsou přehlednější „obrázky“ než u grafů relací. Například si srovnajte následující:



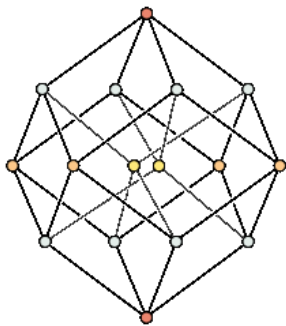
Zjednodušení a konvence přinesené následující definicí jsme ostatně měli možnost vidět už na některých z předchozích ilustračních obrázků uspořádání.



Definice: *Hasseovský diagram* konečné uspořádané množiny (M, \preceq) je jeho (jednoznačné) grafické znázornění získané takto:

- Do první „horizontální vrstvy“ zakreslíme body odpovídající minimálním prvkům (M, \preceq) . (Tj. které **nepokrývají** nic.) \square
- Máme-li již zakreslenou vrstvu i , pak do vrstvy $i + 1$ (která je „nad“ vrstvou i) zakreslíme všechny nezakreslené prvky, které **pokrývají pouze** prvky vrstev $\leq i$. Pokud prvek x vrstvy $i + 1$ pokrývá prvek y vrstvy $\leq i$, spojíme x a y neorientovanou hranou (tj. „čárkou“).

Příklad 6.16. Relaci inkluze na čtyřprvkové množině $\{a, b, c, d\}$ zakreslíme Hasseovským diagramem takto:



Jak vidíme, v Hasseovském diagramu „**vynecháváme**“ ty hrany relace \preceq , které vyplývají z **reflexivity** či **tranzitivity**. To celý obrázek výrazně zpřehlední, a přitom nedochází ke ztrátě informace. □

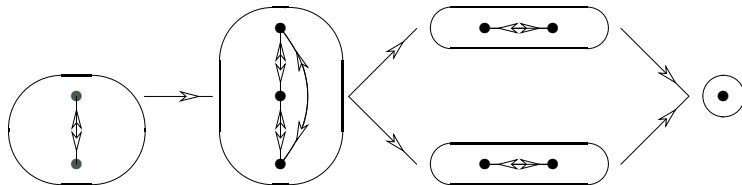
Lze vynechat i šipky na hranách, neboť dle definice všechny míří „vzhůru“. □
Také pojem „**vrstvy**“ v definici je jen velmi neformální, důležité je, že větší (pokrývající) prvky jsou **nad menšími** (pokrývanými).

6.4 Relace předuspořádání

Co když studenty na zkoušce „**uspořádáme**“ podle výsledné známky A–F?
Bude to vždy uspořádání? □ Samozřejmě ne, obvykle více než jeden student bude mít třeba známku E, což zjevně porušuje antisymetrii.

Definice: Relace $R \subseteq M \times M$ je **předuspořádání** (také **kvazi-uspořádání**, nebo **polouspořádání**) právě když R je **reflexivní** a **tranzitivní**. □

Rozdíl mezi uspořádáním a předuspořádáním je (jen neformálně řečeno!) v tom, že u předuspořádání srovnáváme prvky podle kritéria, které není pro prvek jedinečné. V předuspořádání takto mohou vznikat „**balíky**“ (třídy) se stejnou hodnotou kritéria, což schematicky ilustrujeme na následujícím obrázku.



Z předuspořádání na uspořádání

Věta 6.17. Je-li \sqsubseteq předuspořádání na M , můžeme definovat relaci \sim na M předpisem

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak \sim je ekvivalence na M , která se nazývá **jádro předuspořádání** \sqsubseteq . \square

Na rozkladu M/\sim pak lze zavést relaci \preceq definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je **uspořádaná množina indukovaná** \sqsubseteq . \square

Pro ukázkou si vezměme relaci dělitelnosti na \mathbb{Z} . Pak třeba $-2 \sim 2$.
Jádrem zde jsou dvojice čísel stejné absolutní hodnoty.

Věta 6.17. Je-li \sqsubseteq předuspořádání na M , můžeme definovat relaci \sim na M předpisem

$$x \sim y \quad \text{právě když} \quad x \sqsubseteq y \text{ a } y \sqsubseteq x.$$

Pak \sim je ekvivalence na M , která se nazývá **jádro předuspořádání** \sqsubseteq .

Na rozkladu M/\sim pak lze zavést relaci \preceq definovanou takto

$$[x] \preceq [y] \quad \text{právě když } x \sqsubseteq y.$$

Pak $(M/\sim, \preceq)$ je uspořádaná množina.

Důkaz (náznak): \square Tranzitivita a reflexivita relace \sim vyplývá z tranzitivity a reflexivity relace \sqsubseteq . Symetrie \sim pak je přímým důsledkem její definice. Tudíž \sim skutečně je relací ekvivalence a M/\sim je platný rozklad. \square

Tranzitivita a reflexivita relace \preceq se opět dědí z relace \sqsubseteq . Její antisymetrie vyplývá následující úvahou: Pokud $[x] \preceq [y]$ a $[y] \preceq [x]$, pak podle naší definice $x \sqsubseteq y$ a $y \sqsubseteq x$, neboli $x \sim y$ a $[x] = [y]$ podle definice tříd rozkladu. \square

Pozor, nejdůležitější částí této větve důkazu je však ještě zdůvodnění, že naše podaná definice vztahu $[x] \preceq [y]$ je korektní, což znamená, že její platnost nezávisí na konkrétní volbě reprezentantů x z $[x]$ a y z $[y]$. \square