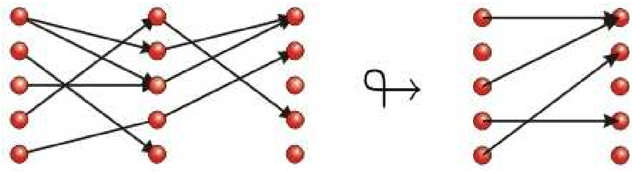
7 Skládání relací a funkcí

Látku o relacích zakončíme poznatky o obracení a skládání relací mezi sebou.



Kde jste se již intuitivně setkali se skládáním funkcí – jak například spočítáte na kalkulačce výsledek složitějšího vzorce? A jinde? □Co třeba relační databáze?

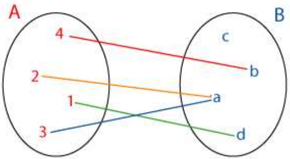
Stručný přehled lekce

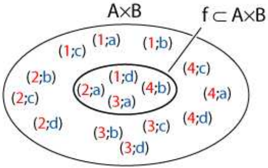
* Inverze a skládání relací v obecném pojetí. Praktické použití.
* Přehled základních vlastností funkcí.
* Skládání funkcí (coby relací), speciálně aplikováno na permutace.

Relace a funkce, zopakování

- *Relace* mezi množinami $A_1, \cdots, A_k$, pro $k \in \mathbb{N}$, je libovolná podmnožina kartézského součinu
$$R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k \,.$$
Pokud $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = A$, hovoříme o *$k$-ární relaci R na A.* □

- *(Totální) funkce* z množiny A do množiny B je relace f mezi A a B taková, že pro každé $x \in A$ existuje právě jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$.

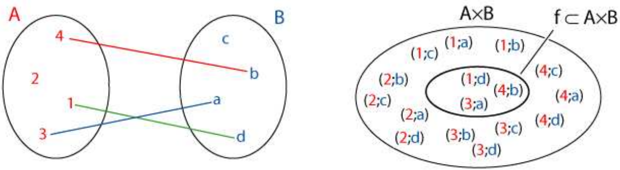




□

  * Množina A se nazývá *definiční obor* a množina B *obor hodnot* funkce f. Funkcím se také říká *zobrazení*.
  * Místo $(x, y) \in f$ píšeme obvykle $f(x) = y$. Zápis $f : A \to B$ říká, že f je funkce s definičním oborem A a oborem hodnot B.

- Pokud naší definici funkce upravíme tak, že požadujeme pro každé $x \in A$ nejvýše jedno $y \in B$ takové, že $(x, y) \in f$, obdržíme definici *parciální funkce* z A do B.

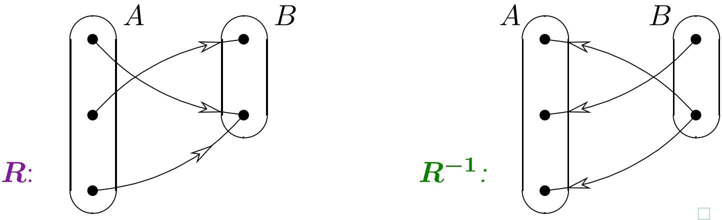


7.1 Inverze a skládání relací

Ve výkladu se nyní vrátíme k obecnému pojetí relací mezi dvěma množinami.

Definice: Nechť $R \subseteq A \times B$ je binární relace mezi A a B. *Inverzní relace* k relaci R se značí R^{-1} a je definována takto:

$$\boldsymbol{R^{-1} = \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}}$$

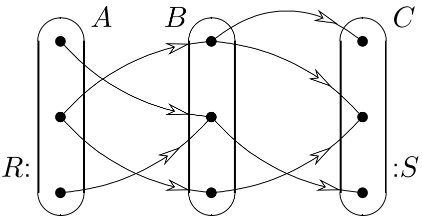


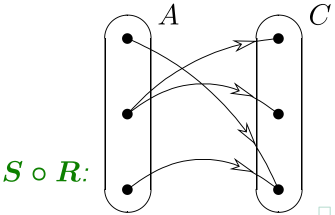
R^{-1} je tedy relace mezi B a A.

Definice skládání

Definice 7.1. **Složení (kompozice)** relací R a S.
Nechť $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$ jsou binární relace. *Složení* relací R a S (v tomto pořadí!) je relace $S \circ R \subseteq A \times C$ definovaná takto:

$$\boldsymbol{S \circ R = \{(a,c) \mid \text{existuje } b \in B \text{ takové, že } (a,b) \in R, (b,c) \in S\}}$$





Složení relací čteme „R *složeno s* S“ nebo (pozor na pořadí!) „S *po* R“.

Několik matematických příkladů skládání relací následuje zde.

- Je-li
  - $A = \{a, b\}, \quad B = \{1, 2\}, \quad C = \{X, Y\},$
  - $R = \{(a, 1), (b, 1), (b, 2)\}, \quad S = \{(1, X)\},$

  pak složením vznikne relace
  - $S \circ R = \{(a, X), (b, X)\}.$ □

- Složením funkcí $h(x) = x^2$ a $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{R}$ vznikne funkce

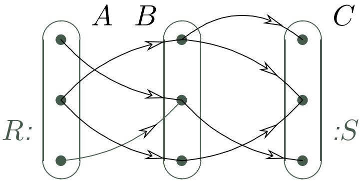
$$(f \circ h)(x) = f(h(x)) \;=\; x^2 + 1. \square$$

- Složením těchže funkcí „naopak" ale vznikne funkce

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) \;=\; (x + 1)^2. \square$$

Poznámka: Nepříjemné je, že v některých oblastech matematiky (například v algebře při skládání zobrazení) se setkáme s právě opačným zápisem skládání, kdy se místo $S \circ R$ píše $R \cdot S$ nebo jen RS.

Tvrzení 7.2. *Nechť* $R \subseteq A \times B$ *a* $S \subseteq B \times C$ *jsou binární relace. Pak inverzí složené relace* $S \circ R$ *je relace*



$$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}.$$

7.2 Praktické použití skládání

Příklad 7.3. *Skládání v relační databázi studentů, jejich předmětů a fakult.*

Mějme dvě binární relace – jednu R přiř. studentům MU kódy jejich zapsaných předmětů, druhou S přiř. kódy předmětů jejich mateřským fakultám.

R :

student (učo)	předmět (kód)
121334	MA010
133935	M4135
133935	IA102
155878	M1050
155878	IB000

S :

předmět (kód)	fakulta MU
MA010	FI
IB000	FI
IA102	FI
M1050	PřF
M4135	PřF

Jak z těchto „tabulkových“ relací zjistíme, kteří studenti mají zapsané předměty na kterých fakultách (třeba na FI)?

Jedná se jednoduše o složení relací $S \circ R$. V našem příkladě třeba:

$S \circ R$:

student (učo)	fakulta MU
121334	FI
133935	FI
133935	PřF
155878	FI
155878	PřF

□

Zobecněné skládání relací

Definice: (**skládání relací vyšší arity**): Mějme relace $T \subseteq K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_k$ a $U \subseteq L_1 \times L_2 \times \cdots \times L_\ell$, přičemž pro nějaké $m < \min(k, \ell)$ platí $L_1 = K_{k-m+1}, L_2 = K_{k-m+2}, \ldots, L_m = K_k$. □Pak relaci T lze *složit* s relací U na zvolených m složkách $L_1, \ldots, L_m$ („překrytí") s použitím Definice 7.1 takto:

- Položme $A = K_1 \times \cdots \times K_{k-m}$, $B = L_1 \times \cdots \times L_m$ a $C = L_{m+1} \times \cdots \times L_\ell$.
- Příslušné relace pak jsou
  - $R = \{(\vec{a}, \vec{b}) \in A \times B \mid (a_1, \ldots a_{k-m}, b_1, \ldots b_m) \in T\}$ a
  - $S = \{(\vec{b}, \vec{c}) \in B \times C \mid (b_1, \ldots b_m, c_{m+1}, \ldots c_\ell) \in U\}$. □
- Nakonec přirozeně položme $U \circ_m T \simeq S \circ R$, takže vyjde $U \circ_m T =$

$$\left\{(\vec{a}, \vec{c}) \mid \text{ ex. } \vec{b} \in B, \text{ že } (a_1, \ldots a_{k-m}, b_1, \ldots b_m) \in T \text{ a } (b_1, \ldots b_m, c_{m+1}, \ldots c_\ell) \in U\right\}.$$

Schematicky pro snadnější orientaci:

$$\begin{array}{rllll}
T \subseteq & \boxed{K_1 \times \cdots \times K_{k-m} \times} & \boxed{K_{k-m+1} \times \cdots \times K_k} & & \\
U \subseteq & & \boxed{L_1 \times \cdots \times L_m} & \boxed{\times L_{m+1} \times \cdots \times L_\ell} \\
U \circ_m T \subseteq & \underbrace{\boxed{K_1 \times \cdots \times K_{k-m}}}_{A} \times & \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{B} & \times \underbrace{\boxed{L_{m+1} \times \cdots \times L_\ell}}_{C}
\end{array}$$

Příklad 7.4. *Skládání v relační databázi pasažérů a letů u let. společností.*

Podívejme se na příklad hypotetické rezervace letů pro cestující, relace T. Jak známo (tzv. codeshare), letecké společnosti si mezi sebou „dělí“ místa v letadlech, takže různé lety (podle kódů) jsou ve skutečnosti realizovány stejným letadlem jedné ze společností. To zase ukazuje relace U.

T :

pasažér	datum	let
Petr	5.11.	OK535
Pavel	6.11.	OK535
Jan	5.11.	AF2378
Josef	5.11.	DL5457
Alena	6.11.	AF2378

U :

datum	let	letadlo
5.11.	OK535	ČSA
5.11.	AF2378	ČSA
5.11.	DL5457	ČSA
6.11.	OK535	AirFrance
6.11.	AF2378	AirFrance

Ptáme-li se nyní, setkají se Petr a Josef na palubě stejného letadla? Případně, čí letadlo to bude? Odpovědi nám dá složení relací $U \circ_2 T$, jak je popsáno výše.

$U \circ_2 T$:

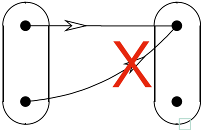
pasažér	letadlo
Petr	ČSA
Josef	ČSA
Pavel	AirFrance
...	...

□

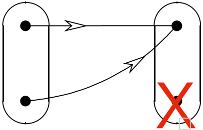
7.3 Vlastnosti funkcí

Definice 7.5. **Funkce** (případně parciální funkce) $f : A \to B$ je

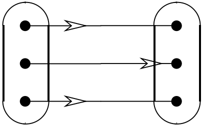
- *injektivní* (nebo také prostá) právě když pro každé $x, y \in A$, $x \neq y$ platí $f(x) \neq f(y)$;



- *surjektivní* (nebo také „na“) právě když pro každé $y \in B$ existuje $x \in A$ takové, že $f(x) = y$;



- *bijektivní* (vzáj. jednoznačná) právě když je injektivní a souč. surjektivní. □



Následují jednoduché ukázky vlastností funkcí.

- Funkce $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ je surjektivní, ale není prostá. $\square$
- Funkce $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ daná předpisem

$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{jestliže } x < 0, \\ 2x & \text{jinak} \end{cases}$$

  je bijektivní. $\square$
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$ je bijektivní. $\square$
- Funkce $\emptyset : \emptyset \to \{a, b\}$ je injektivní, ale není surjektivní. $\square$

Příklad 7.6. *Dokázali byste nalézt jednoduše (tj. „hezky“) vypočitatelnou bijektivní funkci* $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*?* $\square$

$\square$

Příklad 7.7. *Pro jaké hodnoty parametrů* a, b *je funkce* $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + 1$ *z* $\mathbb{R}$ *do* $\mathbb{R}$ *injektivní či surjektivní?*

$\square$

Inverze funkce

Inverze funkce je dána definicí inverze relace z Oddílu 7.1.

Příklady inverzí pro běžné funkce:

- Inverzí bijektivní funkce $f(x) = x + 1$ na $\mathbb{Z}$ je funkce $f^{-1}(x) = x - 1$. $\Box$
- Inverzí prosté funkce $f(x) = e^x$ na $\mathbb{R}$ je parciální funkce $f^{-1}(x) = \ln x$. $\Box$
- Funkce $g(x) = x \bmod 3$ není prostá na $\mathbb{N}$, a proto její inverzí je „jen" relace $g^{-1} = \{(a, b) \mid a = b \bmod 3\}$.
  Konkrétně $g^{-1} = \{(0, 0), (0, 3), (0, 6), \ldots, (1, 1), (1, 4), \ldots, (2, 2), (2, 5), \ldots\}$. $\Box$

Tvrzení 7.8. *Mějme funkci $f : A \to B$. Pak její inverzní relace f^{-1} je*

a) parciální funkce právě když f je prostá, $\Box$

b) funkce právě když f je bijektivní. $\Box$

Tvrzení 7.9. *Je-li inverzní relace f^{-1} funkce f taktéž parciální funkcí, tak platí $f^{-1}(f(x)) = x$ pro všechna x z definičního oboru.*

7.4 Skládání funkcí, permutace

Fakt: Mějme funkce (zobrazení) $f : A \to B$ a $g : B \to C$. Pak jejich *složením* coby relací v tomto pořadí vznikne zobrazení $(g \circ f) : A \to C$ definované

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \,. \square$$

- Jak například na běžné kalkulačce vypočteme hodnotu funkce $\sin^2 x$? $\square$
  Složíme (v tomto pořadí) „elementární“ funkce $f(x) = \sin x$ a $g(x) = x^2$. $\square$
- Jak bychom na „elementární“ funkce rozložili aritmetický výraz $2\log(x^2+1)$? $\square$
  Ve správném pořadí složíme funkce $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x + 1$, $f_3(x) = \log x$ a $f_4(x) = 2x$. $\square$
- A jak bychom obdobně vyjádřili složením funkcí aritmetický výraz $\sin x + \cos x$? Opět je odpověď přímočará, vezmeme „elementární“ funkce $g_1(x) = \sin x$ a $g_2(x) = \cos x$, a pak je „složíme“ další funkcí $h(x, y) = x + y$. $\square$
  Vidíme však, že takto pojaté „skládání“ už nezapadá hladce do našeho zjednodušeného formalismu skládání relací.

Skládání permutací

Definice: Nechť *permutace* π množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ je určena seřazením jejích prvků jako $(p_1,p_2,\ldots,p_n)$. Pak π je zároveň bijektivním zobrazením $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ definovaným předpisem $\pi(i)=p_i$. □

Abychom postihli obě tyto podoby, budeme také používat zápis $\binom{1,\,2,\,\ldots,\,n}{p_1,p_2\ldots,p_n}$. □

Fakt: Permutace lze *skládat jako relace* (funkce) podle Definice 7.1.

Poznámka: Všechny permutace množiny $\{1,2,\ldots,n\}$ spolu s operací skládání tvoří grupu, zvanou symetrická grupa S_n.

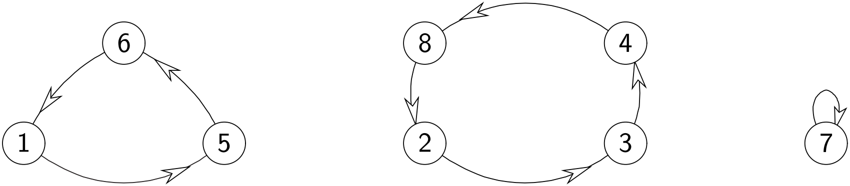
Permutační grupy (podgrupy symetrické grupy) jsou velice důležité v algebře, neboť každá konečná grupa je vlastně isomorfní některé permutační grupě. □

Příkladem permutace vyskytujícím se v programátorské praxi je třeba zobrazení $i \mapsto (i+1) \mod n$ ("inkrement"). □Často se třeba lze setkat (aniž si to mnohdy uvědomujeme) s permutacemi při indexaci prvků polí. □

Tvrzení 7.10. *Mějme permutace π a σ množiny $\{1,2,\ldots,n\}$. Pak jejich složení $\sigma\circ\pi$ je opět permutací množiny $\{1,2,\ldots,n\}$.*

Cykly permutací

V kontextu pohledu na funkce a jejich skládání coby relací si zavedeme jiný, názornější, způsob zápisu permutací – pomocí jejich cyklů.



Definice: Nechť π je permutace na množině A. *Cyklem v π* rozumíme posloupnost $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ různých prvků A takovou, že $\pi(a_i) = a_{i+1}$ pro $i = 1, 2, \ldots, k-1$ a $\pi(a_k) = a_1$. □

- Jak název napovídá, v zápise cyklu $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ není důležité, kterým prvkem začneme, ale jen dodržení cyklického pořadí. Cyklus v permutaci může mít i jen jeden prvek (zobrazený na sebe).
- Například permutace $\binom{1,2,3,4,5,6,7,8}{5,3,4,8,6,1,7,2}$ je zakreslena svými cykly výše.

Reprezentace permutací jejich cykly

Věta 7.11. *Každou permutaci π na konečné množině A lze zapsat jako složení cyklů na disjunktních podmnožinách (rozkladu) A.* □

Důkaz: Vezmeme libovolný prvek $a_1 \in A$ a iterujeme zobrazení $a_2 = \pi(a_1)$, $a_3 = \pi(a_2)$, atd., až se dostaneme „zpět“ k $a_{k+1} = \pi(a_k) = a_1$. Proč tento proces skončí? Protože A je konečná a tudíž ke zopakování některého prvku a_{k+1} musí dojít. Nadto je π prostá, a proto nemůže nastat $\pi(a_k) = a_j$ pro $j > 1$. Takto získáme první cyklus $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$. □

Induktivně pokračujeme s hledáním dalších cyklů ve zbylé množině $A' = A \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$, dokud nezůstane prázdná. V tomto indukčním kroku si musíme uvědomit, že π omezené na nosnou množinu A' je stále permutací podle definice. □ □

Značení permutace jejími cykly: Nechť se permutace π podle Věty 7.11 skládá z cyklů $\langle a_1, \dots, a_k \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_l \rangle$ až třeba $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$. Pak zapíšeme

$$\boldsymbol{\pi = (\, \langle a_1, \dots, a_k \rangle \, \langle b_1, \dots, b_l \rangle \dots \langle z_1, \dots, z_m \rangle \,)\,.}$$

Příklad 7.12. *Ukázka skládání permutací daných svými cykly.*

Vezměme 7-prvkovou permutaci $\pi = (3,4,5,6,7,1,2)$, rozšířeně zapsanou s pomůckou jako $\binom{1,2,3,4,5,6,7}{3,4,5,6,7,1,2}$. Ta se skládá z jediného cyklu $\langle 1,3,5,7,2,4,6\rangle$.

Jiná permutace $\sigma = (5,3,4,2,6,1,7)$, neboli $\binom{1,2,3,4,5,6,7}{5,3,4,2,6,1,7}$, se rozkládá na tři cykly $\langle 1,5,6\rangle$, $\langle 2,3,4\rangle$ a $\langle 7\rangle$. □

Nyní určíme složení $\sigma \circ \pi$ těchto dvou permutací (už přímo v zápisu cykly):

$$\big(\langle 1,5,6\rangle\langle 2,3,4\rangle\langle 7\rangle\big) \circ \big(\langle 1,3,5,7,2,4,6\rangle\big) = \big(\langle 1,4\rangle\langle 2\rangle\langle 3,6,5,7\rangle\big)$$

(Nezapomínejme, že první se ve složení aplikuje pravá permutace!) □

Postup skládání jsme použili následovný:

* 1 se zobrazí v permutaci vpravo na 3 a pak vlevo na 4. □
* Následně 4 se zobrazí na 6 a pak na 1. Tím „uzavřeme“ první cyklus $\langle 1,4\rangle$. □
* Dále se 2 zobrazí na 4 a pak hned zpět na 2, tj. má samostatný cyklus. □
* Zbylý cyklus $\langle 3,6,5,7\rangle$ určíme analogicky.

□