

Řetězce a seznamy

IB111 Úvod do programování
Radek Pelánek

2017

Rozcvička: šifry

① C S A R B V
E K T E O A

② A J L B N O C E

③ C S B U J T M B W B

Transpoziční šifry

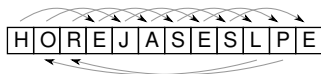
pozpátku



trojice pozpátku



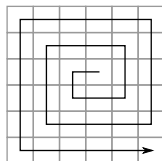
ob tři



dopředu dozadu

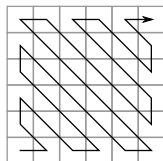


šnek



L	B	A	K	I	N
I	C	S	E	J	B
Z	H	O	P	D	Y
K	O	K	L	A	R
O	V	A	N	Y	U
U	H	R	A	Z	E

cik-cak



N	I	O	U	Z	E
H	B	K	K	H	A
C	O	Y	A	Z	R
L	S	V	R	B	I
K	A	E	A	U	L
P	O	D	J	N	Y

Substituční šifry

Jednoduchá substituce - posun o 3 pozice

	K	O	Z	A
	↓	↓	↓	↓
	10	14	25	0
+3	↓	↓	↓	↓
	13	17	2	3
	↓	↓	↓	↓
	N	R	C	D

Substituce podle hesla

HLEDEJPODLIPOU	H → 7	+ → 25 → Z
SLONSLONSLONSL		
ZWSQWUDBVWWCGF	S → 18	

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Řetězce a znaky – ukázky operací

```
"kos" * 3  
"petr" + "klic"  
text = "velbloud"  
len(text)  
text[0]  
text[2]  
text[-1]  
ord('b')  
chr(99)
```

str() – explicitní přetypování na řetězec

Uvozovky, apostrofy

- jiné jazyky často: uvozovky pro řetězce, apostrofy pro znaky
- Python: lze používat uvozovky i apostrofy
- PEP8: hlavně konzistence

Proč indexujeme od 0?

- částečně „historicky-technické“ důvody
- ale i dobré „matematické“ důvody

Pro zájemce:

Why numbering should start at zero (Edsger W. Dijkstra)

<http://www.cs.utexas.edu/users/EWD/transcriptions/EWD08xx/EWD831.html>

<http://programmers.stackexchange.com/questions/110804/why-are-zero-based-arrays-the-norm>

<https://www.quora.com/Why-do-array-indexes-start-with-0-zero-in-many-programming-languages>

- jak jsou znaky reprezentovány?
ASCII, ISO 8859-2, Windows-1250, Unicode, UTF-8, ...
<http://www.joelonsoftware.com/articles/Unicode.html>
<http://www.polylab.dk/utf8-vs-unicode.html>
- Python3 – Unicode řetězce
- pro tento kurz:
 - ord, chr – převod znaků na čísla a zpět
 - anglická abeceda má přiřazena po sobě jdoucí čísla

```
for i in range(26):  
    print(chr(ord('A')+i))
```


Řetězce – pokročilejší indexování

(specifické pro Python)

```
text = "velbloud"  
text[:3]      # první 3 znaky  
text[3:]      # od 3 znaku dále  
text[1:8:2]   # od 2. znaku po 7. krok po 2  
text[::-3]    # od začátku do konce po 3
```

Řetězce – změny

- neměnitelné (immutable) – rozdíl oproti seznamům a oproti řetězcům v některých jiných jazycích
- změna znaku – vytvoříme nový řetězec

```
text = "kopec"  
text[2] = "n" # chyba  
text = text[:2] + "n" + text[3:]
```

Řetězce: další operace

```
text = "i Have a dream."  
print(text.upper())  
print(text.lower())  
print(text.capitalize())  
print(text.rjust(30))  
print("X",text.center(30),"X")  
print(text.replace("dream","nightmare"))
```

... a mnoho dalších, více později, příp. viz dokumentace

Pozn. objektová notace

Příklad: Transpozice (rozcvička 1)

- úkol: přepis textu po sloupcích
- příklad vstupu a výstupu (2 sloupce):
 - C E S K A T R E B O V A
 - C S A R B V
 - E K T E O A

Transpozice (rozcvička 1)

```
def cipher_columns(text, n):  
    for i in range(n):  
        for j in range(len(text) // n + 1):  
            position = j * n + i  
            if position < len(text):  
                print(text[position], end="")  
        print()
```

Transpozice (rozcvička 1), kratší varianta

Za využití notace specifické pro Python:

```
def cipher_columns(text, n):  
    for i in range(n):  
        print(text[i::n])
```

Caesarova šifra (rozcvička 3)

- substituční šifra – posun v abecedě
- vstup: text, posun
- výstup: zašifrovaný text
- BRATISLAVA, 1 → CSBUJTMBWB

Caesarova šifra – řešení

```
def caesar_cipher(text, n):
    result = ""
    text = text.upper()
    for i in range(len(text)):
        if text[i] == " ":
            result = result + " "
        else:
            c = ord(text[i]) + n
            if (c > ord("Z")): c = c - 26
            result = result + chr(c)
    return result
```

Pozn. Řešení má nedostatky – zkuste najít a vylepšit.

Caesarova šifra – rozlomení

- máme text zašifrovaný Caesarovou šifrou (s neznámým posunem)
- jak text dešifrujeme?
- příklad: MPKTDVLDVLMZCF

Caesarova šifra – rozlomení

- máme text zašifrovaný Caesarovou šifrou (s neznámým posunem)
- jak text dešifrujeme?
- příklad: MPKTDVLDVLMZCF
- jak to udělat, aby program vrátil jen jednoho kandidáta?

Caesarova šifra – rozlomení

k	Kandidát	b_s	b_f	k	Kandidát	b_s	b_f
0	MPKTWTDVLEVELMZCF	0	21	13	ZCXGJGQIYIRYZMPS	0	-13
1	NQLUXUEWMWFMNADG	13	0	14	ADYHKHRJZJSZANQT	0	16
2	ORMVYVFXNXGNOBEH	24	9	15	BEZILISKAKTABORU	67	59
3	PSNWZGWYOYHOPCFI	5	-3	16	CFAJMJTLBLUBCPSV	0	11
4	QTOXAXHZPZIPQDGJ	10	-6	17	DGBKNKUMCMVCDQTW	5	-4
5	RUPYBYIAQAJQREHK	0	9	18	EHCLOLVNDNWDERUX	17	31
6	SVQZCZJBRBKRSFIL	0	3	19	FIDMPMWEOXEFVY	5	22
7	TWRADAKCSCSLSTGJM	32	26	20	GJENQNXPPYFGTWZ	4	-23
8	UXSBEBLDTDMTUHKN	0	24	21	HKFOROYQGQZGHUXA	16	-17
9	VYTFCFCMEUENUVILO	11	46	22	ILGPSPZRHRAHIVYB	28	18
10	WZUDGDNFVFOVWJMP	0	-6	23	JMHQTQASISBIJWZC	9	0
11	XAVEHEOGWGPWXKNQ	5	-2	24	KNIRURBTJTCJKXAD	5	24
12	YBWFIFPHXHQXYLOR	0	-28	25	LOJSVSCUKUDKLYBE	4	29

Vigenèrova šifra

- substituce podle hesla – „sčítáme“ zprávu a heslo
- vhodné cvičení
- rozlomení Vigenèrovovy šifry?

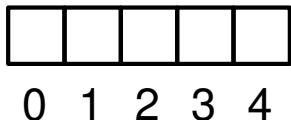
Seznamy (pole) – motivace

- řazení studentů podle bodů na písemce
- reprezentace herního plánu (piškvorky, šachy)
- frekvence písmen v textu

Frekvenční analýza nevhodně

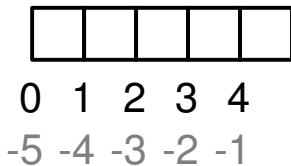
```
def frequency_analysis(text):  
    text = text.upper()  
    freqA = 0  
    freqB = 0  
    freqC = 0  
    for letter in text:  
        if letter == 'A':  
            freqA += 1  
        elif letter == 'B':  
            freqB += 1  
        elif letter == 'C':  
            freqC += 1  
    print('A', freqA)  
    print('B', freqB)  
    print('C', freqC)
```

Seznamy (pole)



- „více položek za sebou v pevném pořadí“
- indexováno od nuly
- základní koncept dostupný ve všech jazycích, běžně „pole“ (array), položky stejného typu, pevně daná délka
- seznamy v Pythonu – obecnější (ale pomalejší)
- Python a pole – knihovna NumPy (nad rámec IB111)

Seznamy v Pythonu



- variabilní délka
- položky mohou být různého typu
- indexování i od konce (pomocí záporných čísel)

Seznamy: použití v Pythonu

```
s = []          # deklarace prázdného seznamu
s = [3, 4, 1, 8]
s[2]           # indexace prvku, s[2] = 1
s[-1]         # indexace od konce, s[-1] = 8
s[2] = 15     # změna prvku
s.append(6)   # přidání prvku
s[1:4]        # indexace intervalu, s[1:4] = [4, 15, 8]
len(s)        # délka seznamu, len(s) = 5
t = [3, "pes", [2, 7], -8.3]
              # seznam může obsahovat různé typy
```

list() – přetypování na seznam

Seznamy: konvence zápisu (PEP8)

- mezera se dělá: za čárkou
- mezera se nedělá: před čárkou, na „okrajích“

Python: seznamy a cyklus for

- cyklus for – přes prvky seznamu*
- range – vrací seznam* čísel
- typické použití: `for i in range(n)`
- ale můžeme třeba:
 - `for animal in ["dog", "cag", "pig"]: ...`
 - `for letter in "hello world": ...`

(*) ne úplně přesně – z důvodu efektivity se používají generátory a speciální „range object“, v případě potřeby použijte explicitní přetypování na seznam: `list(range(10))`

Objekty, hodnoty, aliasy – stručné varování

a = [1, 2, 3]
b = [1, 2, 3] nebo b = a[:]

a → [1, 2, 3]
b → [1, 2, 3]

a = [1, 2, 3]
b = a

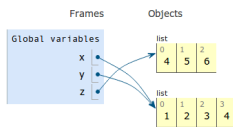
a → [1, 2, 3]
b ↗ [1, 2, 3]

- parametry funkcí – pouze volání hodnotou (na rozdíl např. od Pascalu: volání hodnotou a odkazem)
- měnitelné objekty (např. seznam) však funkce může měnit
- mělká vs hluboká kopie
- více později

Vizualizace běhu programu

<http://www.pythontutor.com/>

```
1 x = [1, 2, 3]
2 y = [4, 5, 6]
3 z = y
4 y = x
5 x = z
6
7 x = [1, 2, 3] # a different [1, 2, 3] list!
8 y = x
→ 9 x.append(4)
→ 10 y.append(5)
11 z = [1, 2, 3, 4, 5] # a different list!
12 x.append(6)
13 y.append(7)
14 y = "hello"
--
```



vhodné např. pokud je nejasný některý z příkladů ve slidech

N-tice - stručné představení

- n-tice (tuples)
- neměnitelná varianta seznamů
- kulaté závorky místo hranatých (někdy lze vynechat):
 $t = (1, 2, 3)$
- neměnitelné podobně jako řetězce
- typické užití:
 - souřadnice: (x, y)
 - barva: (r, g, b)
- použití pro přiřazení: $a, b = b, a$

Příklad: výpočet průměrné hodnoty

```
def average1(num_list):  
    total = 0  
    for i in range(len(num_list)):  
        total += num_list[i]  
    return total / len(num_list)
```

```
def average2(num_list):  
    total = 0  
    for x in num_list:  
        total += x  
    return total / len(num_list)
```

```
def average3(num_list):  
    return sum(num_list) / len(num_list)
```

Ilustrace práce se seznamem

```
def divisors_list(n):  
    divisors = []  
    for i in range(1, n+1):  
        if n % i == 0:  
            divisors.append(i)  
    return divisors  
  
divisors24 = divisors_list(24)  
print(divisors24)  
print(len(divisors24))  
for x in divisors24: print(x**2)
```


Frekvenční analýza nevhodně

```
def frequency_analysis(text):  
    text = text.upper()  
    freqA = 0  
    freqB = 0  
    freqC = 0  
    for letter in text:  
        if letter == 'A':  
            freqA += 1  
        elif letter == 'B':  
            freqB += 1  
        elif letter == 'C':  
            freqC += 1  
    print('A', freqA)  
    print('B', freqB)  
    print('C', freqC)
```

Frekvenční analýza lépe

```
def frequency_analysis(text):  
    text = text.upper()  
    frequency = [0 for i in range(26)]  
    for letter in text:  
        if ord(letter) >= ord('A') and\  
            ord(letter) <= ord('Z'):  
            frequency[ord(letter) - ord('A')] += 1  
    for i in range(26):  
        if frequency[i] != 0:  
            print(chr(ord('A')+i), frequency[i])
```

Simulace volebního průzkumu – nevhodné řešení

```
def survey(size, pref1, pref2, pref3):  
    count1 = 0  
    count2 = 0  
    count3 = 0  
    for i in range(size):  
        r = random.randint(1,100)  
        if r <= pref1: count1 += 1  
        elif r <= pref1 + pref2: count2 += 1  
        elif r <= pref1 + pref2 + pref3: count3 += 1  
    print("Party 1:", 100.0 * count1 / size)  
    print("Party 2:", 100.0 * count2 / size)  
    print("Party 3:", 100.0 * count3 / size)
```

Simulace volebního průzkumu – lepší řešení

```
def survey(size, pref):  
    n = len(pref)  
    count = [0 for i in range(n)]  
    for _ in range(size):  
        r = random.randint(1,100)  
        for i in range(n):  
            if sum(pref[:i]) < r <= sum(pref[:i+1]):  
                count[i] += 1  
    for i in range(n):  
        print("Party", i+1, 100 * count[i] / size)
```

Toto řešení má stále nedostatky (po stránce funkčnosti) – zkuste dále vylepšit.

Převod do Morseovy abecedy

- vstup: řetězec
- výstup: zápis v Morseově abecedě
- příklad: PES \rightarrow .-- . | . | . . .

Převod do Morseovy abecedy nevhodně

```
def to_morse_poor(text):  
    result = ''  
    for i in range(len(text)):  
        if text[i] == 'A': result += '.-|'  
        elif text[i] == 'B': result += '-...|'  
        elif text[i] == 'C': result += '-.-.|'  
        elif text[i] == 'D': result += '-..|'  
        # etc  
    return result
```

Převod do Morseovy abecedy: využití seznamu

```
morse = ['.-.', '-...-', '-.-.', '-..'] # etc
```

```
def to_morse(text):  
    result = ''  
    for i in range(len(text)):  
        if ord('A') <= ord(text[i]) <= ord('Z'):  
            c = ord(text[i]) - ord('A')  
            result += morse[c] + '|'  
    return result
```

(ještě lepší řešení: využití slovníku – bude později)

Převod z Morseovy abecedy

```
def find_letter(sequence):  
    for i in range(len(morse)):  
        if morse[i] == sequence:  
            return chr(ord('A') + i)  
    return '?'  
  
def from_morse(message):  
    result = ''  
    sequence = ''  
    for symbol in message:  
        if symbol == '|':  
            result += find_letter(sequence)  
            sequence = ''  
        else:  
            sequence += symbol  
    return result
```


Split – seznam z řetězce

split – rozdělí řetězec podle zadaného oddělovače, vrátí seznam

```
>>> vowels = "a,e,i,o,u,y"
>>> vowels.split(",")
['a', 'e', 'i', 'o', 'u', 'y']
>>> message = ".-..|---|-.|.-"
>>> message.split("|")
['.-..', '---', '-.', '.-']
```

Příklad – načítání vstupu od uživatele

```
>>> input_string = input()
3 7
>>> xstring, ystring = input_string.split(" ")
>>> x = int(xstring)
>>> y = int(ystring)
```

Výškový profil



mapy.cz

Výškový profil

```
heights_profile([3, 4, 5, 3, 4, 3, 2, 4, 5, 6, 5])
```

```
          #
        #   # # #
      # #   #   # # # #
    # # # # # # # # # # #
  # # # # # # # # # # # #
# # # # # # # # # # # #
```

Ascent 7

Descent 5

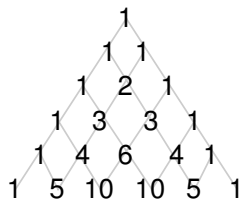
Výškový profil

```
def heights_profile(heights):
    for v in range(max(heights)):
        for i in range(len(heights)):
            if heights[i] >= max(heights) - v:
                print("#", end=" ")
            else:
                print(" ", end=" ")
        print()
    print()
```

Výškový profil

```
def elevation(heights):  
    ascent = 0  
    descent = 0  
    for i in range(len(heights)-1):  
        if heights[i] < heights[i+1]:  
            ascent += heights[i+1] - heights[i]  
        else:  
            descent += heights[i] - heights[i+1]  
    print("Ascent", ascent)  
    print("Descent", descent)
```

Pascalův trojúhelník



$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\ \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \end{array}$$

Explicitní vzorec

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Rekurzivní vztah

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Pascalův trojúhelník

```
def pascal_triangle(n):  
    current_row = [1]  
    for j in range(n):  
        for x in current_row:  
            print(x, end=" ")  
        print()  
        next_row = [1]  
        for i in range(len(current_row)-1):  
            next_row.append(current_row[i] +\  
                            current_row[i+1])  
        next_row.append(1)  
        current_row = next_row
```


- dělitelné jen 1 a sebou samým
- předmět zájmu matematiků od pradávna, cca od 70. let i důležité aplikace (moderní kryptologie)
- problémy s prvočísly:
 - výpis (počet) prvočísel v intervalu
 - test prvočíselnosti
 - rozklad na prvočísla (hledání dělitelů)

Výpis prvočísel přímočaře

```
def print_primes(how_many):  
    n = 1  
    while how_many > 0:  
        if len(divisors_list(n)) == 2:  
            print(n, end=" ")  
            how_many -= 1  
        n += 1  
    print()
```

Test prvočíselnosti:

- zkusíme všechny možné dělitele od 2 do $n - 1$
- vylepšení:
 - dělíme pouze dvojkou a lichými čísly
 - dělíme pouze dvojkou a čísly tvaru $6k \pm 1$
 - dělíme pouze do \sqrt{n}

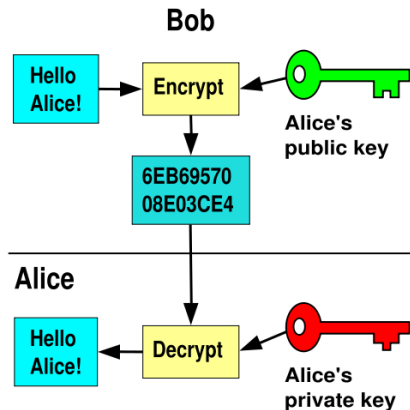
Test prvočíselnosti: chytřejší algoritmy

- náhodnostní algoritmy
- polynomiální deterministický algoritmus (objeven 2002)
- (vysoce) nad rámec tohoto kurzu
- **umí se to** dělat rychle

Rozklad na prvočísla

- rozklad na prvočísla = faktorizace
- naivní algoritmy:
 - průchod všech možných dělitelů
 - zlepšení podobně jako u testů prvočíslnosti
- chytřejší algoritmy:
 - složitá matematika
 - aktivní výzkumná oblast
 - neumí se to dělat rychle
 - max cca 200 ciferná čísla

Příklad aplikace: asymetrická kryptologie



http://en.wikipedia.org/wiki/Public-key_cryptography

Asymetrická kryptologie: realizace

- jednosměrné funkce
 - jednoduché vypočítat jedním směrem
 - obtížné druhým (inverze)
 - ilustrace: míchání barev
- RSA (Rivest, Shamir, Adleman) algoritmus
 - jednosměrná funkce: násobení prvočísel (inverze = faktorizace)
 - veřejný klíč: součin velkých prvočísel
 - bezpečnost \sim nikdo neumí provádět efektivně faktorizaci
 - využití modulární aritmetiky, Eulerovy věty, ...

Eratosthenovo síto

- problém: výpis prvočísel od 2 do n
- algoritmus: opakovaně provádíme
 - označ další neškrtnuté číslo na seznamu jako prvočíslo
 - všechny násobky tohoto čísla vyškrtni

Eratosthenovo síto

1. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

2. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

3. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

4. krok

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Eratosthenovo síto

```
def eratosthenes(count):
    is_candidate = [1 for i in range(count)]
    for i in range(2, count):
        if is_candidate[i]:
            print(i, end=" ")
            k = 0
            while k < count:
                is_candidate[k] = 0
                k += i
    print()
```

- prvočísla – Ulamova spirála
- Pascalův trojúhelník – obarvení podle sudosti – Sierpiňského trojúhelník

Vi Hart: Doodling in math: Sick number games

<https://www.khanacademy.org/math/recreational-math/vi-hart/doodling-in-math/v/>

`doodling-in-math-sick-number-games`

Seznamy, řetězce:

- základní operace
- ukázky použití
- kryptografické příklady (historické) a souvislosti (moderní)

Příště: Vyhledávání, řadicí algoritmy